BOGDAN HORBANIUC • GHEORGHE DUMITRAŞCU

THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE ET TRANSFERT DE CHALEUR

TABLE DES MATIERES

THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE

TRANSFERT DE CHALEUR

THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE

1. NOTIONS FONDAMENTALES

1.1. Objet et méthodes d'étude

La thermodynamique[1] technique étudie les échanges énergétiques sous forme de chaleur et de travail mécanique.

Les problèmes principaux à résoudre sont l'engendrement, la transmission et l'utilisation de l'énergie thermique. On peut dire que l'objet d'étude de cette science est principalement la forme thermique d'interaction énergétique. Quand on ne pourra pas séparer (dans le domaine qui fait l'objet d'étude de notre démarche théorique) les aspects thermiques et mécaniques des échanges d'énergie, ces deux types d'interaction seront étudiés ensemble.

Les méthodes spécifiques correspondant aux niveaux d'analyse de la réalité physique sont:

a. *Le niveau macroscopique*

L'approche correspondant à ce niveau est représentée par **la thermodynamique phénoménologique**. En étudiant les propriétés physiques générales d'un nombre fini de corps ayant une structure continue, son point de départ est l'analyse des phénomènes thermiques à échelle macroscopique. Cette méthode est fondée sur les deux lois générales (principes) de la thermodynamique et fait usage dans sa démarche théorique des résultats fournis par la recherche expérimentale.

b. *Le niveau microscopique*

La thermodynamique statistique correspond à ce niveau de la réalité physique. Celle-ci étudie les phénomènes thermiques en prenant comme point de départ les mécanismes moléculaires des processus. En rappellant que le nombre de molécules contenues dans un volume usuel est considérable (environ $6 \cdot 10^{23}$ dans une

---

[1] **Thermodynamique**: des mots grecs "θερμοσ" (thermos) = chaud et "δυναμισ" (dunamis) = puissance

mole, soit 22,4 litres de gaz à pression et température normales), il est évident que la connaissance parfaite d'un système exigerait la connaissance exacte de la position et de l'état de mouvement de chaque molécule constituant le système.

Ceci est impossible pour des raisons de principe, les relations d'incertitude de Heisenberg interdisant la connaissance simultanée de la position et de la vitesse d'une particule avec précision absolue . Même si ceci était possible, des raisons d'ordre pratique découragent toute tentative. Par conséquent, cette approche fait usage de la méthode statistique (basée sur la théorie des probabilités), en mettant en évidence un aspect impossible à rendre manifeste par l'intermédiaire de la thermodynamique phénoménologique, c'est à dire le caractère probabilistique des phénomènes thermiques.

Les deux approches ne sont pas contradictoires; au contraire, elles se complètent réciproquement en arrivant aux mêmes résultats par des voies différentes.

1.2. Système thermodynamique

Pour étudier les interactions thermiques et mécaniques d'un corps avec autres corps ou régions de l'éspace qui l'entourent, on considère le corps comme isolé par rapport aux corps environnants. Le corps ainsi isolé est désigné sous le nom de **corps thermodynamique**; les autres corps avec lesquels celui-ci interagit constituent le **milieu extérieur**. La notion de corps thermodynamique étant parfois limitative, la définition d'un terme plus large devient nécessaire.

On définit le **système thermodynamique** comme un nombre fini de corps ayant une structure continue et des propriétés différentes et qui échangent énergie sous forme thermique et mécanique.

Dans cette définition on a considéré seulement les interactions mécaniques et thermiques (qui font l'objet de notre étude), en supposant implicitement que les corps constituants du système thermodynamique échangent énergie entre eux et que le système entier interagit du point de vue énergétique avec le milieu extérieur. Un système est défini par son contenu. S'il ne contient qu'une seule éspèce chimique, on dit qu'il est **à un seul constituant**. S'il renferme *n* éspèces chimiques différentes, il est dit **à n constituants**. Un système est dit **homogène** (ou constitué d'une seule phase) lorsque la matière à l'intérieur de ce système a la même composition chimique et les mêmes propriétés physiques dans chacun de ses points.

La délimitation de système par rapport à son milieu extérieur est une opération arbitraire par laquelle on introduit des surfaces fictives, dites **frontières** ou **surfaces de contrôle**; les frontières sont nécessaires pour définir univoquement le système. Ces surfaces peuvent être *fixes* ou *mobiles*, *matérielles* ou *imaginaires*.

Si les frontières du système sont impérméables à l'échange de matière, on dit que le système est **fermé**; si celles-ci permettent le transfert de substance entre le système et le milieu extérieur, on dit que le système est **ouvert**.

On peut classifier les systèmes fermés selon le critère de *l'échange d'énergie*, en **systèmes isolés** et **systèmes non-isolés**. Un système est dit **isolé**, lorsque ses frontières sont impérméables à tout échange de chaleur et travail. Un système est **non-isolé** lorsque ses frontières permettent l'échange d'énergie sous forme thermique et mécanique avec le milieu extérieur.

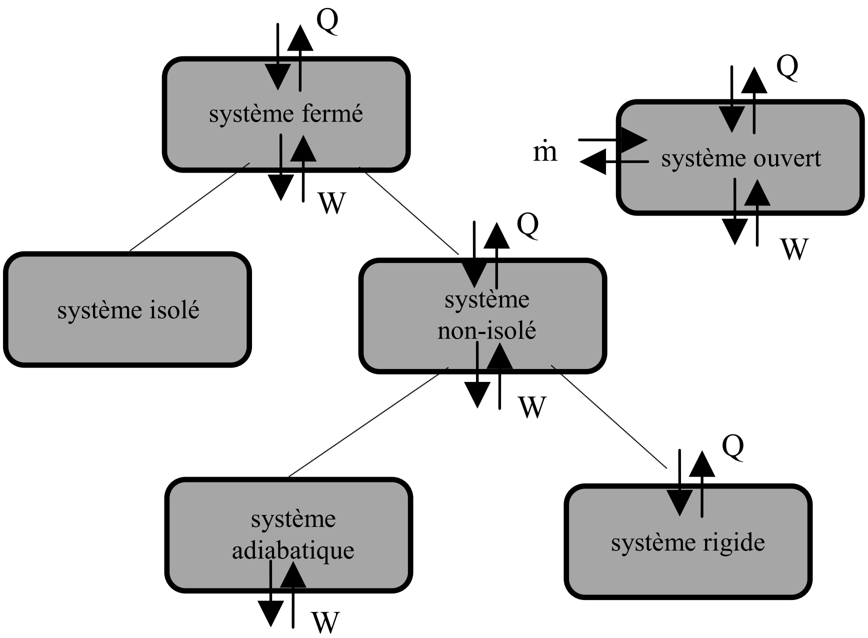


Fig. 1.1.

Il y a deux types particuliers de systèmes non-isolés: les systèmes **adiabatiques** (seulement l'échange de travail leur est permis), respectivement les systèmes **rigides** (leurs frontières sont pérméables seulement à l'échange thermique).

Cette classification a été schématisée sur la Fig. 1.1. ($\dot{m}$ - débit massique; Q - chaleur; W - travail).

Par sa nature, un système ouvert ne peut être que non-isolé (l'échange de matière implique l'échange d'énergie).

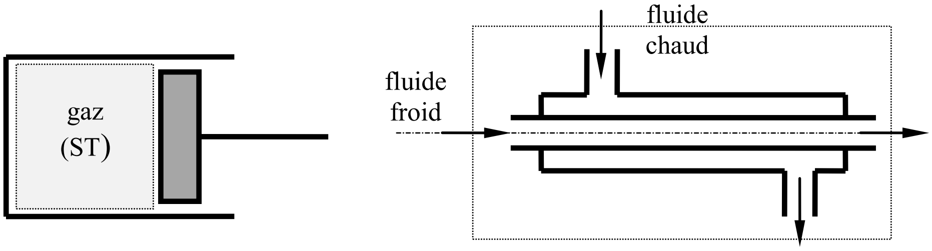
Un exemple classique de système fermé est représenté par le gaz contenu dans un cylindre muni d'un piston étanche (voir Fig. 1.2.a.). En isolant le cylindre et le piston du point de vue thermique et en immobilisant le piston, on obtient un système isolé. Si on enlève l'isolation thermique, on obtient un système rigide; si on débloque le piston, le système résultant est un système adiabatique. Sur la Fig. 1.2.b. on a

représenté un système ouvert typique - un échangeur de chaleur (on voit que ses frontières sont traversées par des flux de matière).

Remarques:

1. Certains systèmes peuvent être alternativement ouverts et fermés en fonction des diverses phases du cycle fonctionnel: par exemple, le cylindre d'un moteur à combustion interne est un système ouvert pendant les périodes d'admission et d'échappement, respectivement fermé, pendant les périodes de compression et de détente.
2. On peut placer les frontières de telle manière que le système ainsi défini soit du type désiré. Par exemple, si les frontières entourent toute l'installation dont l'échangeur de chaleur de Fig. 1.2.b. fait partie, on obtient un système fermé.

1.3. Etat thermodynamique. Grandeurs d'état et grandeurs de transformation



a. b.

Fig. 1.2.

L'état thermodynamique d'un système représente la situation du système à un instant donné. L'état est défini lorsque la description de ce système est possible par la connaissance d'un nombre de grandeurs physiques charactéristiques directement mesurables, appelées **paramètres d'état**. Les paramètres d'état utilisés dans la thermodynamique sont la pression p, le volume V et la température T. Seulement deux paramètres d'état sont indépendants; le troisième peut être calculé en utilisant une équation qui relie les trois paramètres d'état, dite **équation d'état**. Une grandeur physique caractérisant l'état qui est une fonction des paramètres d'état est dite **fonction d'état**. Les fonctions d'état usuelles sont **l'énergie interne** (U), **l'enthalpie** (H) et **l'entropie** (S). On désigne les paramètres d'état et les fonctions d'état par le terme général de **grandeurs d'état**.

Les grandeurs **extensives** dépendent de la quantité de substance et sont désignées par majuscule (par exemple: l'énergie interne U, le volume V etc.). Les

grandeurs **intensives** sont indépendantes de la quantité de substance et sont désignées par minuscule (par exemple, la pression *p*). En rapportant une grandeur extensive à la masse *m,* on obtient une grandeur **massique** (par exemple, le volume massique *v* est défini par la relation: v = V / m [m^3 / kg]).

Un système thermodynamique est dit **en état d'équilibre** lorsque les paramètres d'état restent invariables dans le temps. Cette définition suppose la réalisation simultanée des deux conditions suivantes:

- **la condition d'équilibre mécanique**: la pression est uniforme et égale à la pression du milieu extérieur ;

- **la condition d'équilibre thermique**: la température est uniforme et égale à la température du milieu extérieur.

Lorsque les conditions internes ou externes changent, le système n'est plus en équilibre. Puisque la tendance naturelle des systèmes physiques est de rétablir l'état d'équilibre, le système doit échanger de l'énergie sous forme mécanique et thermique avec le milieu extérieur. On dit que le système subit une **évolution**, un **processus** ou une **transformation thermodynamique** qui le fait passer d'un état d'équilibre initial vers un état d'équilibre final. Le travail et la chaleur caractérisent l'intensité des interactions énergétiques du système pendant un processus thermodynamique et par conséquent on les appelle grandeurs **de transformation** (**transitives**).

Ces grandeurs diffèrent essentiellement des grandeurs d'état: *on parle de la* ***variation*** *d'une grandeur d'état* pendant un processus, respectivement *d'une* ***quantité*** *d'une grandeur de transformation*, car celle-ci dépend du chemin suivi (c'est à dire la succession d'états intermédiaires constituant le processus).

Du point de vue mathématique, les grandeurs d'état admettent des différentielles totales exactes, tandis que les grandeurs de transformation n'admettent pas de telles différentielles. Par conséquent, en cas d'une transformation élémentaire (entre deux états infiniment rapprochés) on parle de la <u>différentielle d'une grandeur d'état</u> (par exemple: d*U*), respectivement de la <u>quantité élémentaire δ d'une grandeur de transformation</u> (par exemple: δ*W* - travail élémentaire ou δ*Q* - chaleur élémentaire).

Pour une transformation finie, on calcule la variation Δ*U* de l'énergie interne:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int_1^2 dU \tag{1.1}$$

respectivement la chaleur *Q* ou le travail *W*:

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q \tag{1.2}$$

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W \qquad (1.3)$$

1.4. Transformations réversibles, transformations irréversibles

Une transformation au cours de laquelle le système passe successivement par des états intermédiaires constituant chacun quasiment (c'est à dire presque) un état d'équilibre, est dite **transformation quasi-statique**. Une telle transformation peut être représentée dans un diagramme par une ligne. Une transformation est **non-statique** lorsque les états intermédiaires sont des états *hors-equilibre*. Il est impossible de représenter une telle transformation par une ligne dans un diagramme.

Une **transformation réversible** est une transformation quasi-statique, telle que l'on puisse réaliser exactement la transformation inverse (sans introduire des changements permanents dans le milieu extérieur).

Une transformation est **irréversible** si on ne peut pas réaliser la transformation inverse sans introduire des modifications permanentes dans le milieu extérieur.

L'irréversibilité est due aux phénomènes dissipatifs - frottments (*irréversibilité interne*) et à l'échange thermique à différences finies de température (*irréversibilité externe*).

Toutes les transformations réelles présentent un caractère irréversible.

Remarques:

1. Il est matériellement impossible de réaliser des transformations quasi-statiques. Cependant, une approche expérimentale consisterait à faire évoluer sans frottements un système le plus lentement possible pour ne pas rompre brutalement son état de "quasi équilibre".
2. Une transformation quasi-statique n'est pas nécessairement réversible. Par exemple, la torsion d'un fil métallique au delà de ses limites élastiques peut être réalisée d'une façon "presque statique". Cependant, le dépassement d'un tel seuil empêche une inversion exacte du phénomène de torsion.

QUESTIONS

1. La température est-elle un concept microscopique ou macroscopique?

2. La colonne thermométrique descend et ensuite monte lorsqu'on introduit le bulbe d'un thermomètre en verre à mercure dans une flamme. Expliquez.

3. Quelles sont les difficultés engendrées par la définition de la température par l'intermédiaire de la densité de l'eau?

4. Expliquez pourquoi les lacs gelent-ils en partant de la surface?

5. Quelles sont les conditions qu'un système thermodynamique doit vérifier pour être en équilibre thermodynamique?

6. Pourriez-vous indiquer un processus irréversible dans lequel la chaleur est communiquée à un système?

7. Donnez quelques exemples de processus irréversibles rencontrés dans la nature.

8. Donnez des exemples mettant en évidence une différence nette entre température et chaleur.

2. PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Le premier principe de la thermodynamique représente la loi de conservation de l'énergie appliquée aux transformations thermodynamiques. Pour établir les relations mathématiques du premier principe, il est nécessaire de définir d'abord les grandeurs physiques qui interviennent dans ces relations: deux grandeurs d'état (l'énergie interne et l'enthalpie) et deux grandeurs de transformation (la chaleur et le travail).

2.1. L'énergie interne

L'énergie interne (notation: U - unité de mesure: le Joule) **est la grandeur d'état qui représente l'énergie thermique d'un système en un état quelconque**.

Grandeur essentiellement extensive, l'énergie interne est une fonction d'état comme toute autre fonction caractérisant un des différents états macroscopiques du système. Elle est définie à une constante près (sa valeur ne peut être connue) et par conséquent, une valeur attribuée à cette grandeur énergétique ne peut donc provenir que d'une convention.

Dans la thermodynamique technique on utilise très souvent l'énergie interne massique (u):

$$u = \frac{U}{m} \quad [J / kg] \tag{2.1}$$

L'énergie interne a trois composantes:

- **l'énergie interne cinétique** (U_c), associée aux mouvements d'agitation des particules du système;
- **l'énergie interne potentielle** (U_p), associée aux forces d'interaction à distance entre les particules;
- **l'énergie de zéro** (U_0), représentant l'énergie "interne" des particules ayant une structure (molécules et atomes)

Seules les premières deux composantes sont variables pendant les processus étudiés par la thermodynamique technique et par conséquent, leur somme est appelée "**énergie sensible**" (U_s):

$$U_s = U_c + U_p \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \Delta U_s \tag{2.2}$$

2.1. L'enthalpie

L'enthalpie[1] (*H*) - unité de mesure: Joule - est une fonction d'état conventionnelle (à la différence de l'énergie interne, elle n'a pas de signification physique). Le terme "enthalpie" a été introduit par Kamerlingh Onnes[2].

La variation de cette grandeur mesure l'échange de chaleur au cours d'une transformation isobare (à pression constante).

La définition mathématique de l'enthalpie se fait par l'intermédiaire de la relation suivante:

$$\boxed{H = U + pV} \quad [J] \tag{2.3}$$

Pour 1 kg de substance, **l'enthalpie massique** est:

$$\boxed{h = \frac{H}{m} = u + pv} \quad [J / kg] \tag{2.4}$$

La variation de l'enthalpie (on rappelle que "Δ" signifie différence) est:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \Delta U + \Delta(pV) = U_2 - U_1 + p_2V_2 - p_1V_1 \tag{2.5}$$

ou:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \Delta u + \Delta(pv) = u_2 - u_1 + p_2v_2 - p_1v_1 \tag{2.6}$$

Pour une transformation élémentaire:

$$dH = dU + d(pV) = dU + pdV + Vdp \tag{2.7}$$

respectivement:

$$dh = du + d(pv) = du + pdv + vdp \tag{2.8}$$

L'enthalpie est définie à une constante arbitraire près puisque la fonction d'état *U* l'est aussi.

2.3. La chaleur

Toute transformation d'un système s'accompagne généralement d'un échange de chaleur. Ce dernier n'est pas lié à des actions dirigées comme c'est le cas du travail. L'échange de chaleur se produit plûtot spontanément, d'une façon désordonnée, dès que dans le domaine spatial considéré une différence de température apparaît entre deux points ou régions différentes. L'échange de chaleur cesse lorsque l'équilibre thermique s'est instauré.

Par conséquent, **la chaleur est la grandeur de transformation dont la valeur mesure l'intensité d'une interaction thermique**.

---

[1] Provenant du grec "ενθαλπειν" (enthalpein) - s'échauffer

[2] **Kamerlingh Onnes H.** (1853 - 1926): physicien néerlandais, prix Nobel en 1913; réussit la liquéfaction de l'hélium et découvrit la supraconductibilité en 1914

Pour une transformation élémentaire, **la quantité élémentaire de chaleur** δQ est:

$$\boxed{\delta Q = mcdT} \quad [J] \tag{2.9}$$

où: m - la masse de substance [kg];
c - la capacité calorifique massique de la substance [J / kg K];
T - la température absolue [K]

Pour un kilogramme de substance, **la chaleur massique** élémentaire δq est:

$$\boxed{\delta q = cdT} \quad [J / kg] \tag{2.10}$$

En cas d'une transformation finie entre l'état initial *1* et l'état final *2*, on calcule la chaleur échangée, par intégration:

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 mcdT \tag{2.11}$$

$$q_{12} = \int_1^2 \delta q = \int_1^2 cdT \tag{2.12}$$

La chaleur représente un échange d'énergie dirigé **vers le système** (le système **reçoit** de la chaleur) ou **vers le milieu extérieur** (le système **cède** de la chaleur). Par conséquent, on adopte la convention suivante (voir aussi Fig. 2.1.):

- le système reçoit de la chaleur: +Q;
- le système cède de la chaleur : -Q.

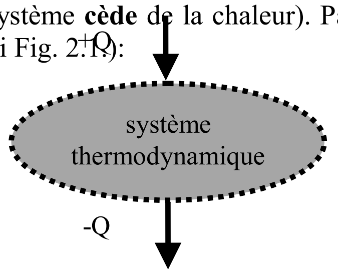


Fig. 2.1.

2.4. Le travail

Le travail est la grandeur de transformation qui mesure l'intensité d'une interaction mécanique.

Dans la thermodynamique technique deux types de travail sont définis correspondant au type de système thermodynamique considéré:

- système thermodynamique **fermé**: ⇒ travail **de variation du volume**;
- système thermodynamique **ouvert**: ⇒ travail **technique**.

2.4.1. Travail de variation du volume

Dans ce cas, les seules forces qui donnent lieu au travail mécanique sont **les forces de pression**.

Considérons un cylindre muni d'un piston étanche sans frottement, qui renferme une quantité *m* de gaz (Fig. 2.2.). A un instant donné, la résultante des forces de pression agissant sur le piston a pour intensité F = pA, où *p* est la pression du gaz et *A*, l'aire du piston. Pour un déplacement élémentaire d*x* de celui-ci, le travail de la force *F* est:

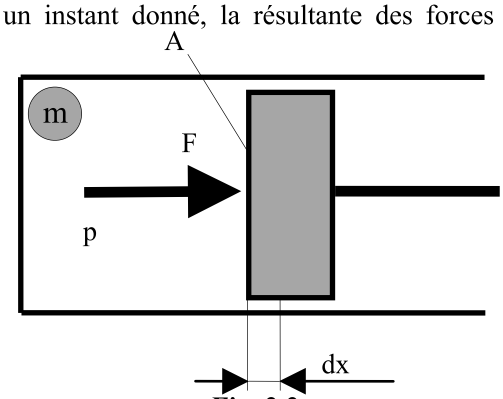


Fig. 2.2.

$$\delta W = Fdx = pAdx = pdV$$

donc:

$$\boxed{\delta W = pdV} \qquad [J] \qquad (2.13)$$

où dV est la variation de volume du gaz, due au déplacement du piston.

Le travail massique élémentaire δ*w* (pour une masse de 1 kg) est:

$$\boxed{\delta w = \frac{\delta W}{m} = pdv} \qquad [J / kg] \qquad (2.14)$$

où v = V / m [m^3 / kg] est le **volume massique**.

Deux cas sont à envisager (voir aussi Fig. 2.3.):

- Si le gaz subit une compression, dV < 0 et donc il faut lui **fournir** du travail: le gaz **reçoit** du travail de la part du milieu extérieur. Le travail est **négatif**.
- Si le gaz subit une détente, dV > 0, donc il **cède** du travail au milieu extérieur. Le travail est **positif**.

Le travail W_{12} échangé entre le système et le milieu extérieur au cours d'une transformation réversible faisant passer le système d'un état initial *1* à un état final *2* est:

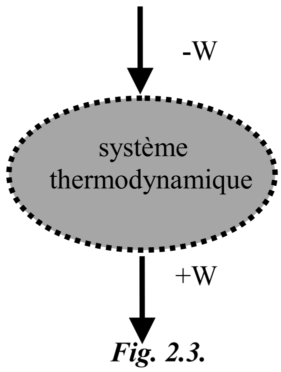


Fig. 2.3.

$$W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 pdV \quad [J] \tag{2.15}$$

ou, compte tenu que le travail de variation du volume est une grandeur extensive, **le travail massique** w_{12} sera:

$$w_{12} = \frac{W_{12}}{m} = \int_1^2 dw = \int_1^2 pdv \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{2.16}$$

Remarques:

1. La pression p est fonction de volume: $p = f(V)$ et par conséquent, pour calculer W_{12} par intégration il est nécessaire de connaître **l'expression mathématique de la loi de variation** f(V). Cette expression se déduit en fonction de la transformation particulière analysée.

2. Dans le diagramme de Clapeyron (le diagramme p - V) l'aire comprise entre la courbe d'une transformation, l'axe des volumes et les abscisses des états extrêmes de la transformation est équivalente (à l'échelle du diagramme) au travail de variation du volume échangé au cours de la transformation (voir Fig. 2.4.).

Le travail, de même que la chaleur, n'est pas une grandeur d'état: il sera donc

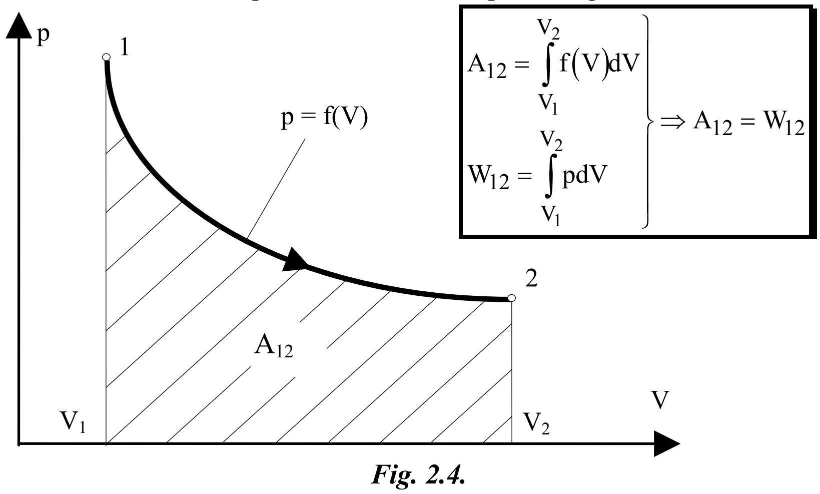


Fig. 2.4.

insensé de les associer à un état d'un système thermodynamique. Ces deux grandeurs se manifestent seulement lorsque le système parcourt une évolution thermodynamique (change son état) et représentent l'énergie (mécanique, respectivement thermique) échangée par le système durant le processus.

2.4.2. Travail technique

Considérons un système ouvert représenté par une machine motrice traversée par un fluide moteur en écoulement stationnaire, qui met en mouvement de rotation l'arbre de la machine. Le travail produit par l'arbre est dit "**travail technique**" ou "**travail utile extérieur**" (notation: W_t).

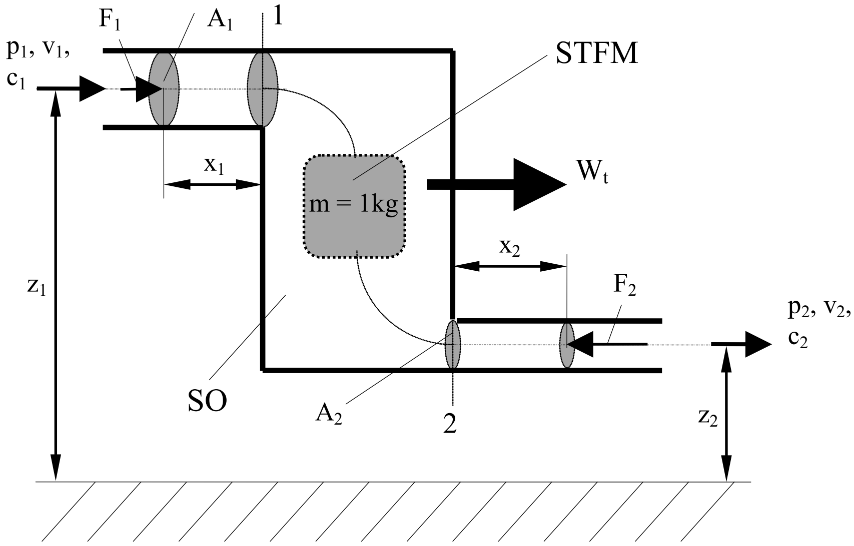


Fig. 2.5.

Soient p_1, v_1, c_1, z_1 respectivement la pression, le volume massique, la vitesse et la hauteur (mesurée par rapport à un niveau arbitraire) d'une tranche de masse unitaire de fluide correspondant à la section d'entrée *1* (voir Fig. 2.5.). On désigne par "2" les mêmes paramètres dans la section de sortie du système ouvert. La tranche de fluide moteur de masse unitaire est considérée comme un **système thermodynamique fermé mobile** (STFM) qui, en traversant le **système ouvert** (SO) représenté par la machine, subit un nombre d'interactions dont l'effet est un échange d'énergie mécanique sous forme de travail de variation du volume (w_{12}). Ces interactions sont:

- l'interaction par transfert de masse dont l'équivalent énergétique est le **travail de déplacement** (w_d);
- l'interaction mécanique dont le résultat est la rotation de l'arbre de la machine, ayant pour équivalent énergétique le **travail technique** (w_{t12});
- **la variation de l'énergie cinétique massique** (Δe_c);
- **la variation de l'énergie potentielle massique** (Δe_p);

Le bilan énergétique donne:

$$w_{12} = w_d + w_{t,12} + \Delta e_c + \Delta e_p \qquad (2.17)$$

$$\Rightarrow w_{t,12} = w_{12} - w_d - \Delta e_c - \Delta e_p \qquad (2.18)$$

Le travail de déplacement

Le travail de déplacement représente l'énergie dépensée pour assurer la circulation de la tranche de fluide à travers la machine.

On calcule le travail de déplacement à la suite d'un bilan énergétique impliquant **le travail d'admission** (w_a) et **le travail d'évacuation** (w_e)**:**

$$w_d = w_a + w_e \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \qquad (2.19)$$

Le travail d'admission (w_a) est l'énergie dépensée par les forces de pression (F_1) - qui agissent dans la conduite d'admission - pour "pousser" la tranche de fluide dans la machine par l'intermédiaire du "piston" gazeux situé derrière la tranche:

$$w_a = -F_1 x_1 = -p_1 A_1 x_1 = -p_1 v_1 \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \qquad (2.20)$$

Il est à noter que le signe "moins" montre qu'il s'agit d'un travail fourni par le milieu extérieur.

Le travail d'évacuation (w_e) est l'énergie dépensée pour faire sortir la même tranche de la machine:

$$w_e = F_2 x_2 = p_2 A_2 x_2 = p_2 v_2 \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \qquad (2.21)$$

Par conséquent:

$$\boxed{w_d = p_2 v_2 - p_1 v_1 = \Delta(pv)} \quad [J / kg] \qquad (2.22)$$

Il résulte que le travail de déplacement mesure la variation d'une grandeur d'état, le produit pression - volume. Par conséquent, le travail de déplacement élémentaire dw_d est:

$$\boxed{dw_d = d(pv) = pdv + vdp} \qquad (2.23)$$

En écrivant la relation (2.18) pour une transformation élémentaire:

$$\delta w_t = \delta w - dw_d - de_c - de_p \qquad (2.24)$$

et en portant (2.23) dans (2.24), compte tenu que:

$$\delta w = pdv \qquad (2.25)$$

$$de_c = cdc \qquad (2.26)$$

$$de_p = gdz \qquad (2.27)$$

on obtient finalement **la relation mathématique du travail technique massique élémentaire**:

$$\boxed{\delta w_t = -vdp - cdc - gdz} \quad [J / kg] \tag{2.28}$$

En intégrant (2.28) il résulte **l'expression du travail technique massique échangé durant une transformation quelconque 1 - 2**:

$$\boxed{w_{t,12} = \int_1^2 \delta w_t = -\int_1^2 vdp - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} - g(z_2 - z_1)} \tag{2.29}$$

En multipliant (2.28) et (2.29) par la masse *m*, on obtient **la relation mathématique du travail technique élémentaire**:

$$\boxed{\delta W_t = -Vdp - mcdc - mgdz} \tag{2.30}$$

respectivement **la relation mathématique du travail technique échangé durant une transformation quelconque 1 - 2**:

$$\boxed{W_{t,12} = \int_1^2 \delta W_t = -\int_1^2 Vdp - m\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} - mg(z_2 - z_1)} \tag{2.31}$$

Si les variations des énergies cinétique et potentielle sont négligeables, les équations (2.28) - (2.30) deviennent respectivement:

$$\delta w_t = -vdp \tag{2.32}$$

$$w_{t,12} = \int_1^2 \delta w_t = -\int_1^2 vdp \tag{2.33}$$

$$\delta W_t = -Vdp \tag{2.34}$$

$$W_{t,12} = \int_1^2 \delta W_t = -\int_1^2 Vdp \tag{2.35}$$

Le travail technique a pour équivalent géométrique dans le diagramme de Clapeyron, l'aire entre la courbe de la transformation, l'axe des pressions et les ordonnées des états extrêmes de la transformation (voir Fig. 2.6.). En effet, l'aire élémentaire dA s'ecrit:

$$dA = -Vdp = \delta W_t \tag{2.36}$$

puisque, compte tenu du sens de parcours de la courbe 1 - 2, la largeur du rectangle élémentaire dA est - dp. L'aire totale A_{12} est donc:

$$A_{12} = \int_{p_1}^{p_2} \delta A = -\int_{p_1}^{p_2} Vdp = W_{t,12} \tag{2.37}$$

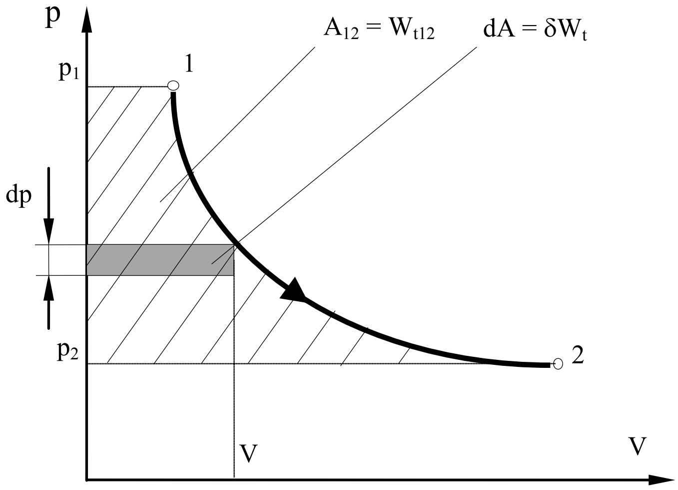


Fig. 2.6.

2.5. Principe d'équivalence

Il n'échappe aujourd'hui à personne qu'on peut transformer aisément une forme d'énergie ordonnée (le travail) en une forme d'énergie désordonnée (la chaleur).

Ainsi, le freinage des roues d'un véhicule "chauffe" les dernières, qui se refroidissent finalement en cédant la chaleur au milieu extérieur. Ici, l'énergie cinétique (forme d'énergie ordonnée) est transformée par un phénomène dissipatif (le frottement) en énergie désordonnée (l'énergie de l'agitation thermique), cédée au milieu extérieur sous forme de chaleur. Dans le passé, nos ancêtres frottaient deux pièces de bois pour allumer le feu. De même, le chauffage ou la climatisation se fait aujourd'hui par conversion du travail en chaleur à l'aide par exemple, des pompes à chaleur.

Cependant, la conversion inverse, bien que possible en certaines conditions, n'est pas *a priori* évidente. On se déplace d'un endroit à l'autre en "brûlant" du combustible, c'est à dire en dépensant de la chaleur.

Dès lors, on peut affirmer qu'il existe une relation entre les deux formes d'énergie, le travail et la chaleur.

Ces deux grandeurs ne se conservent séparément, mais apparaissent liées l'une à l'autre.Le principe d'équivalence affirme que la chaleur et le travail se conservent pendant les transformations fermées (ou cycliques D l'état final coïncide à l'état initial) subies par un système fermé.

Lorsqu'un système parcourt un cycle de transformations au cours duquel il échange du travail et de la chaleur avec le milieu extérieur, ces deux grandeurs sont toujours dans le même rapport[1] d'équivalence:

$$\boxed{Q = W} \qquad (2.38)$$

Autres énoncés équivalents:

L'énergie d'un système thermodynamique isolé reste constante

Il est impossible de réaliser une machine à fonctionnement continu, capable de produire du travail sans consommer une quantité équivalente de chaleur.

Le dernier énoncé affirme l'impossibilité d'un *perpetuum mobile* de première éspèce (une machine qui fournit gratuitement du travail, c'est à dire sans consommer de la chaleur).

L'énoncé général du principe de l'équivalence (qui se rapporte à toutes les formes d'énergie) est:

Il est impossible de créer ou de détruire l'énergie. Elle se conserve dans les processus physiques.

2.6. Le premier principe appliqué aux systèmes fermés parcourant des transformations ouvertes

Considérons un système thermodynamique fermé, évoluant d'un état initial *1* à un état final *2* par deux chemins différents 1 - a - 2, respectivement 1 - b - 2 (voir Fig. 2.7.). Supposons, en outre, que ce système peut revenir à son état initial par un chemin commun 2 - c - 1. L'application du principe d'équivalence aux cycles 1 - a - 2 - c - 1 et 1 - b - 2 - c - 1 donne respectivement:

$$Q_{1-a-2-c-1} = W_{1-a-2-c-1} \qquad (2.39)$$

[1] Dans le Système International (SI) le rapport est égal à l'unité puisque la chaleur et le travail se mesurent en Joules. Dans le système MKfS (dit "Système Technique") la chaleur se mesure en **calories** et le travail en **kgfm** (1 cal = 0,427 kgfm).

$$Q_{1-b-2-c-1} = W_{1-b-2-c-1} \qquad (2.40)$$

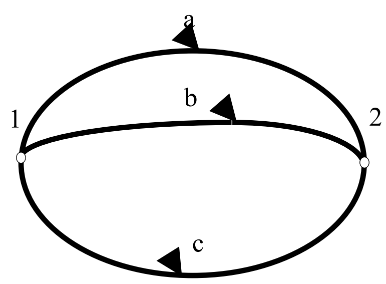


Fig. 2.7.

Compte tenu que:

$$Q_{1-a-2-c-1} = Q_{1-a-2} + Q_{2-c-1} \qquad (2.41)$$

$$W_{1-a-2-c-1} = W_{1-a-2} + W_{2-c-1} \qquad (2.42)$$

$$Q_{1-b-2-c-1} = Q_{1-b-2} + Q_{2-c-1} \qquad (2.43)$$

$$W_{1-b-2-c-1} = W_{1-b-2} + W_{2-c-1} \qquad (2.44)$$

les relations (2.39) et (2.40) donnent respectivement:

$$Q_{1-a-2} - W_{1-a-2} = Q_{2-c-1} - W_{2-c-1} \qquad (2.45)$$

$$Q_{1-b-2} - W_{1-b-2} = Q_{2-c-1} - W_{2-c-1} \qquad (2.46)$$

On déduit:

$$Q_{1-a-2} - W_{1-a-2} = Q_{1-b-2} - W_{1-b-2} = Q_{12} - W_{12} \qquad (2.47)$$

On conclut que lorsque la différence Q - W est independante du chemin suivi par le système pour passer de l'état initial *1* à l'état final *2* distinct de *1*, la différence entre la chaleur et le travail s'identifie à la variation d'une grandeur d'état, **l'énergie interne** *U* du système:

$$\boxed{Q_{12} - W_{12} = U_2 - U_1 = \Delta U} \quad [J] \qquad (2.48)$$

La relation (2.48) constitue **l'expression mathématique du premier principe appliqué aux systèmes fermés parcourant des transformations ouvertes**. La même expression écrite en **grandeurs massiques** donne:

$$\boxed{q_{12} - w_{12} = u_2 - u_1 = \Delta u} \quad [J / kg] \qquad (2.49)$$

En cas d'une **transformation élémentaire**:

$$\boxed{\delta Q - \delta W = dU} \qquad (2.50)$$

$$\boxed{\delta q - \delta w = du} \qquad (2.51)$$

Compte tenu que $\delta W = pdV$ ($\delta w = pdv$), on obtient **les expressions différentielles** du premier principe:

$$\delta Q = dU + pdV \qquad (2.52)$$

respectivement:

$$\delta q = du + pdv \qquad (2.53)$$

D'autre part, en portant les relations (2.7) et (2.8) dans (2.52), respectivement (2.53), on obtient **les expressions différentielles du premier principe en fonction de l'enthalpie**:

$$\delta Q = dH - Vdp \qquad (2.54)$$

et

$$\delta q = dh - vdp \qquad (2.55)$$

Il est à noter que les termes -Vdp et -vdp ne représentent pas le travail technique élémentaire, puisque le système est un système fermé.

2.7. Le premier principe appliqué aux systèmes ouverts parcourant des transformations ouvertes

Soit une machine thermique dans laquelle le fluide moteur qui la traverse reçoit la quantité de chaleur Q_{12} en produisant la travail technique W_{t12} (voir Fig. 2.8.). Les paramètres du fluide sont à l'entrée p_1, v_1, u_1, c_1, z_1 et à la sortie p_2, v_2, u_2, c_2, et z_2 (rappelons que c représente la vitesse et z la hauteur par rapport à un niveau arbitraire).

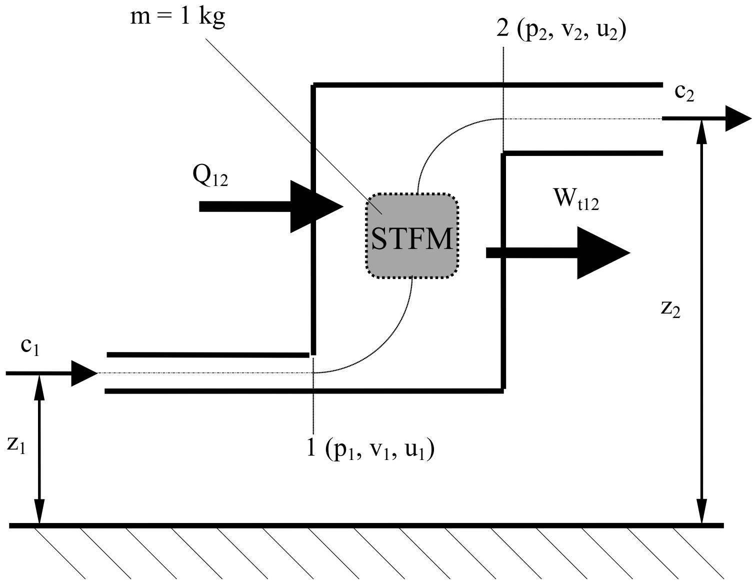


Fig. 2.8.

Pour déduire la relation du premier principe appliqué aux cas étudié on fait usage des résultats précédents. En prenant une tranche de fluide de masse unitaire pour système fermé mobile (STFM), on écrit l'équation du premier principe appliqué aux systèmes fermés qui parcourent des transformations ouvertes:

$$q_{12} - w_{12} = u_2 - u_1 \qquad (2.56)$$

Le travail de variation du volume w_{12} est le résultat des interactions mécaniques subies par le système mobile en traversant le système ouvert constitué par la machine thermique:

$$w_{12} = w_{t,12} + w_d + \Delta e_c + \Delta e_p = w_{t,12} + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad (2.57)$$

où l'on a posé:

$$w_d = p_2 v_2 - p_1 v_1 \quad (2.58)$$

$$\Delta e_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \quad (2.59)$$

$$\Delta e_p = g(z_2 - z_1) \quad (2.60)$$

En portant (2.57) dans (2.56) on obtient:

$$q_{12} - w_{t,12} = u_2 - u_1 + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad (2.61)$$

Compte tenu que u + p v = h, (2.61) devient:

$$\boxed{q_{12} - w_{t,12} = h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)} \quad [J / kg] \quad (2.62)$$

ou, pour une masse *m*:

$$\boxed{Q_{12} - W_{t,12} = H_2 - H_1 + m\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + mg(z_2 - z_1)} \quad [J] \quad (2.63)$$

Les expressions différentielles correspondantes sont:

$$\boxed{\delta q - \delta w_t = dh + cdc + gdz} \quad (2.64)$$

$$\boxed{\delta Q - \delta W_t = dH + mcdc + mgdz} \quad (2.65)$$

2.8. Equations caloriques d'état

L'énergie interne et l'enthalpie sont des **grandeurs caloriques d'état** puisque leur variation s'exprime par l'intermédiaire de la chaleur. Par conséquent, elles dépendent obligatoirement de la température et on écrit:

$$u = u(T, v) \quad (2.66)$$

$$h = h(T, p) \quad (2.67)$$

Les différentielles des deux grandeurs sont:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv \quad (2.68)$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp \qquad (2.69)$$

Considérons la différentielle (2.68) en cas d'une transformation **isochore** (dv = 0):

$$du_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT \qquad (2.70)$$

Le premier principe appliqué à cette transformation donne:

$$\delta q_v = du_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT \qquad (2.71)$$

Mais

$$\delta q_v = c_v dT \qquad (2.72)$$

et par conséquent on obtient:

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v} \qquad (2.73)$$

Il en résulte **la première équation calorique d'état** des gaz réels:

$$\boxed{du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv} \qquad (2.74)$$

En appliquant (2.39) à une transformation **isobare** (dp = 0) on peut écrire:

$$dh_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT \qquad (2.75)$$

De même, pour dp = 0, le premier principe δq = dh - vdp donne:

$$\delta q_p = dh_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT \qquad (2.76)$$

On a aussi:

$$\delta q_p = c_p dT \qquad (2.77)$$

et donc:

$$\boxed{c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p} \qquad (2.78)$$

Par conséquent, en portant (2.78) dans (2.69) il résulte **la deuxième équation calorique d'état** des gaz réels:

$$\boxed{dh = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp} \qquad (2.79)$$

QUESTIONS

1. Donnez une explication qualitative de la production d'énergie thermique causée par les forces de frottement s'exerçant entre des surfaces mobiles. Peut-on réaliser le processus inverse (l'énergie thermique produit un mouvement des surfaces)? Pouvez vous donner une explication plausible?

2. Peut-on transformer entièrement une quantité donnée d'énergie mécanique en énergie thermique? Si c'est vrai, donnez un exemple.

3. Peut-on considérer la chaleur comme une forme d'énergie emmagasinée (ou potentielle)? Une telle interprétation contredirait-elle le concept de chaleur comme énergie dans les processus de transfert dû à une différence de température?

4. Peut-on communiquer de la chaleur à une substance sans produire une augmentation de la température de la substance? Si c'est vrai, contredit ce fait le concept chaleur comme énergie dans un processus d'échange d'énergie dû à une différence de température?

5. Expliquez le fait que la présence d'une grande quantité d'eau (mer ou océan) tend de réduire les températures extrêmes sur la terre ferme limitrophe.

6. Donnez un exemple de processus où le système n'échange pas de la chaleur et pourtant, la température du système varie.

7. Lorsque un corps chaud échauffe un autre corps froid, leurs variations de température sont-elles égales? Donnez des exemples. Peut-on dire alors que la température se transmet d'un corps à l'autre?

8. Peut-on distinguer que le gain en énergie interne d'un corps est le résultat d'un apport de chaleur ou d'un échange de travail?

3. LE GAZ PARFAIT

3.1. Définition du gaz parfait

Le gaz parfait (appellé aussi “gaz de Mariotte[1]”) est le modèle théorique d’un état idéal (hypothétique) des gaz réels. Il est défini par les propriétés suivantes:

1. Le gaz est composé de particules identiques de dimensions négligeables. Ce sont donc des points matériels, à l’exemple de molécules de tout gaz réel monoatomique dont on néglige le volume propre.

2. Toutes les collisions entre particules et particules-obstacles sont supposées parfaitement élastiques. L’énergie cinétique d’une particule est alors conservée.

3. Les particules ne subissent aucune force d’interaction à distance, en particulier celle de la pesanteur sera négligée. On dira que le gaz est isolé. Il est donc uniformement réparti dans l’enceinte qui le contient. Son énergie totale se réduit seulement à l’énergie cinétique de ses particules, l’énergie potentielle d’interaction étant nulle. La conséquence de cette condition est l’isotropie des propriétés physiques du gaz: en un point donné de l’éspace, les propriétés du gaz sont identiques dans toutes les directions.

En certaines conditions (pression faible et température élevée) le comportement des gaz réels est quasi - idéal.

3.2. Les lois des gaz parfaits

3.2.1. Loi de Boyle-Mariotte

A température constante, le produit pression-volume est constant.

$$\boxed{pV = cte \quad \text{ou} \quad p_1V_1 = p_2V_2} \tag{3.1}$$

[1] **Mariotte E.** (1620-1684): physicien français, auteur d’importants travaux sur la compression des gaz

3.2.2. Loi de Gay-Lussac

A pression constante, la variation du volume est proportionnelle à la variation de la température.

$$\frac{V}{T} = cte \quad ou \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \tag{3.2}$$

3.2.3. Loi de Charles

A volume constant, la variation de la pression est proportionnelle à la variation de la température.

$$\frac{p}{T} = cte \quad ou \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{3.3}$$

3.2.4. Loi d'Avogadro

Des volumes égaux de gaz parfaits différents contiennent en mêmes conditions de pression et température des nombres égaux de molécules.

La thermodynamique technique utilise, outre le kilogramme, une autre unité de mesure pour la quantité de substance: **la kilomole** (ou **la masse molaire**) **-** notation: μ.

Par définition, une kilomole représente **la masse de substance dont la valeur, exprimée en kilogrammes, est égale à la masse moléculaire de la substance**. Par exemple, la masse molaire de l'oxygène est: $\mu_{O_2} = 32\ kg / kmole$.

La loi d'Avogadro a une conséquence importante:

En mêmes conditions de température et pression, le volume molaire de tout gaz parfait a la même valeur.

Le volume molaire V_μ est le volume occupé par une kilomole de gaz. On calcule le volume molaire avec la relation:

$$V_\mu = \mu v \quad [m^3 / kmole] \tag{3.4}$$

Dans l'état standard (p_0 = 101325 Pa et T_0 = 273,15 K) la valeur du volume molaire est de 22,414 m^3 / kmole.

3.2.5. Equation d'état des gaz parfaits

L'équation d'état lie les paramètres d'état du gaz en offrant la possibilité de déterminer un paramètre quand on connaît les autres deux. Pour déduire l'équation, on

considère deux états d'équilibre - initial (1) et final (2) - d'un gaz parfait quelconque et une succession de deux évolutions arbitraires entre les deux états. Choisissons une transformation isotherme suivie d'une transformation isobare. La transformation isotherme se déroule entre l'état initial *1* (dont les paramètres connus sont p_1, v_1 et T_1) et l'état intermédiaire *x* caractérisé par les paramètres p_2, v_x et T_1 (la pression $p_x = p_2$ puisque l'évolution suivante est isobare p_2 = cte). Le processus isobare a lieu entre l'état intermédiaire *x* et l'état final *2* dont les paramètres sont p_2, v_2 et T_2.

On écrit les expressions mathématiques des lois simples qui gouvernent les deux évolutions:

1 - x: la loi de Boyle-Mariotte:

$$p_1 v_1 = p_2 v_x \tag{3.5}$$

x - 2: la loi de Gay-Lussac:

$$\frac{v_x}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} \tag{3.6}$$

En calculant v_x à partir de (3.5) il résulte:

$$v_x = \frac{p_1 v_1}{p_2} \tag{3.7}$$

et en portant cette expression dans (3.6) on obtient:

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2} = \text{cte} \tag{3.8}$$

Par conséquent, indépendamment de l'état du gaz, le rapport pv / T est une constante, dite **constante caractéristique** du gaz parfait considéré, notée *R* [1][J / kg K] On écrit donc:

$$\boxed{pv = RT} \tag{3.9}$$

La relation ci-dessus représente **l'équation d'état du gaz parfait**, valable pour <u>une masse unitaire</u> (m = 1 kg). En rappellant que le volume massique est l'inverse de la densité, on écrit de même:

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{3.10}$$

On obtient l'équation d'état <u>pour une masse quelconque</u>, en multipliant (3.9) par *m*:

$$\boxed{pV = mRT} \tag{3.11}$$

Une autre forme de l'équation d'état prend en compte pour quantité de substance, la masse molaire. Par conséquent, en multipliant (3.9) par μ et compte tenu que $\mu V = V_\mu$, <u>l'équation d'état pour une kilomole</u> est:

---

[1]A ne pas la confondre avec la constante universelle dont la signification sera donée plus loin.

$$\boxed{pV_\mu = R_\mu T} \tag{3.12}$$

où:

$$R_\mu = \mu R \tag{3.13}$$

représente **la constante universelle des gaz parfaits: R_μ = 8314 J / kmole K**.

La dernière relation permet de calculer la valeur de la constante caractéristique d'un gaz parfait.

En multipliant (3.12) par le nombre *n* de kilomoles ($n = m / \mu$) on obtient l'équation d'état pour un nombre quelconque de kilomoles:

$$\boxed{pV = nR_\mu T} \tag{3.14}$$

3.2.6. Loi de Joule. Equations caloriques d'état des gaz parfaits

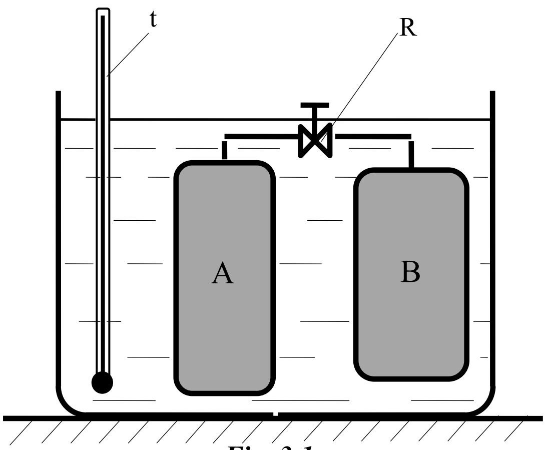


Fig. 3.1.

Cette loi résulte d'une expérience classique (l'expérience de Joule, Gay-Lussac et Hirn) relative à la détente irréversible d'un gaz dans le vide.

Soient deux récipients *A* et *B* de parois rigides et imperméables liés d'une conduite munie par un robinet *R* (voir Fig. 3.1.). L'ensemble de récipients, dont l'un (par exemple *A*) contient un gaz comprimé et l'autre est vide, est immergé dans l'eau d'une cuve calorimétrique initialement en état d'équilibre thermique avec le milieu extérieur. On ouvre brusquement le robinet. Le gaz comprimé se répand dans le récipient vide jusqu'à l'égalisation de la pression. On constate que la température indiquée par le thermométre *t* reste constante (L $Q_{12} = 0$). En se détendant dans le vide, le gaz n'a pas fourni du travail et en outre les parois rigides interdirent toute interaction mécanique entre le gaz et le milieu extérieur. Par conséquent, $W_{12} = 0$. Donc, l'expression (2.48) du premier principe devient en ce cas particulier:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad U = cte \tag{3.15}$$

D'autre part, on a vu que l'énergie interne des gaz réels dépend de la température et du volume. Comme le volume a varié au cours de la transformation et l'énergie interne a resté constante, on en déduit que celle-ci n'est pas influencée par la variation du volume du gaz. Cette conclusion constitue la loi de Joule:

L'énergie interne des gaz parfaits dépend seulement de la température

$$\Rightarrow U = f(T) \tag{3.16}$$

Comme h = u + pv = u + RT = u(T) + RT $\Rightarrow$ h = h(T).

Par conséquent, les deux équations caloriques d'état (2.74) et (2.79) deviennent respectivement:

$$\boxed{du = c_v dT} \tag{3.17}$$

$$\boxed{dh = c_p dT} \tag{3.18}$$

Ces deux relations sont aussi dites **les équations de Joule**. En intégrant (3.17) et (3.18) on obtient les variations de l'énergie interne respectivement de l'enthalpie au cours d'une transformation quelconque:

$$\boxed{u_2 - u_1 = \Delta u = \int_1^2 du = c_v (T_2 - T_1)} \tag{3.19}$$

$$\boxed{h_2 - h_1 = \Delta h = \int_1^2 dh = c_p (T_2 - T_1)} \tag{3.20}$$

Dans le cas du gaz réel, de telles relations sont valables seulement pour les transformations particulières: (3.17) ou (3.19) pour une transformation isochore, respectivement (3.18) ou (3.20) pour une transformation isobare.

3.3. Capacités calorifiques des gaz parfaits

La capacité calorifique d'une substance représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir pour augmenter d'un dégré la température de l'unité de quantité de la substance sans modifier son état d'agrégation.

Dans les calculs thermotechniques on utilise pour les corps gazeux les capacités calorifiques suivantes:

– la capacité calorifique **massique**: **c [J / kg K]**:

$$\delta Q = mc dT \tag{3.21}$$

– la capacité calorifique **molaire**: **C [J / kmole K]**:

$$\delta Q = nC dT \tag{3.22}$$

– la capacité calorifique **volumique**: **c' [J / m^3 K]**:

$$\delta Q = V_0 c' dT \tag{3.23}$$

(V_0 - le volume du gaz à l'état standard)

En écrivant la suite d'égalités: m c = n C = V_0 c', on obtient les relations entre les trois types de capacités calorifiques:

$$C = \mu c = V_{\mu 0} c' \qquad (3.24)$$

Les capacités calorifiques des gaz parfaits dépendent de la température. On peut exprimer cette variation par l'intermédiaire des fonctions polynomiales:

$$c(t) = c_0 + at + bt^2 + \ldots \qquad (3.25)$$

où c_0 représente la capacité calorifique à 0°C. Les coefficients polynomiels *a*, *b*, ... sont déterminés par des expériences. Pour faciliter les calculs, on utilise souvent des relations simplifiées (linéaires):

$$c = c_0 + at \qquad (3.26)$$

La capacité **calorifique moyenne** pour l'intervalle de température t_1 ... t_2 est définie par la relation:

$$\bar{c}_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt \qquad (3.27)$$

La capacité calorifique dépend de la nature de la transformation subie par le gaz. On définit:

- la capacité calorifique **à volume constant (isochore):** c_v, C_v ou c'_v
- la capacité calorifique **à pression constante (isobare):** c_p, C_p ou c'_p

Les deux capacités calorifiques précitées sont liées par **la relation de Mayer**, que l'on déduit en posant:

$$h = u + pv = u + RT \qquad (3.28)$$

En calculant la différentielle de (3.28), compte tenu que dh = c_pdT et du = c_vdT, on obtient:

$$c_p dT = c_v dT + RdT \qquad (3.29)$$

et finalement:

$$c_p - c_v = R \qquad (3.30)$$

ou:

$$C_p - C_v = R_\mu \qquad (3.31)$$

$$c'_p - c'_v = \frac{R_\mu}{V_{\mu 0}} \qquad (3.32)$$

Les expressions (3.30) ... (3.32) sont les trois formes de la relation de Mayer.

Le rapport de la capacité calorifique isobare à la capacité calorifique isochore représente **l'exposant adiabatique (k)**:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c'_p}{c'_v} \tag{3.33}$$

Compte tenu des relations (3.30) ... (3.32) on peut également exprimer les capacités calorifiques comme suit:

$$c_v = \frac{R}{k-1}; \quad c_p = \frac{k}{k-1} R \tag{3.34}$$

$$C_v = \frac{R_\mu}{k-1}; \quad C_p = \frac{k}{k-1} R_\mu \tag{3.35}$$

$$c'_v = \frac{1}{k-1} \frac{R_\mu}{V_{\mu 0}}; \quad c'_p = \frac{k}{k-1} \frac{R_\mu}{V_{\mu 0}} \tag{3.36}$$

3.4. Analyse énergétique des transformations particulières du gaz parfait

L'analyse réside en la détermination des échanges de chaleur et de travail au cours d'une transformation particulière du gaz. Le terme “transformation particulière” désigne une transformation caractérisée par un paramètre d'état constant ou / et par l'absence d'une interaction énergétique (chaleur ou travail). Tout de même, à la fin de ce paragraphe on va aborder une transformation générale durant laquelle tous les paramètres d'état varient et les grandeurs transitives sont non-nulles.

3.4.1. Transformation isochore (dV = 0)

Au cours d'une transformation isochore le volume du gaz reste constant; la loi simple correspondante est la loi de Charles:

$$\frac{p}{T} = \text{cte} \quad \text{ou} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{3.37}$$

Dans le diagramme de Clapeyron on représente une isochore par une droite parallèle à l'axe des pressions (voir Fig. 3.2.). La transformation 1-2 est un <u>échauffement isochore</u> (la pression augmente) et le processus 1-3 représente un <u>refroidissement isochore</u> (la pression décroît).

<u>Le travail</u>

Puisque dV = 0, le travail isochore de variation du volume est nul:

$$\boxed{W_v = 0} \tag{3.38}$$

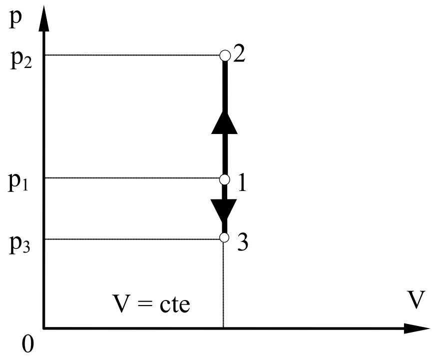


Fig. 3.2.

La chaleur

La forme différentielle du premier principe $\delta Q = dU + pdV$ devient en ce cas:

$$\delta Q_V = dU \qquad (3.39)$$

Par conséquent, pour une transformation 1-2 on écrit:

$$\boxed{Q_{12_V} = U_2 - U_1 = mc_V(T_2 - T_1)} \qquad (3.40)$$

Conclusion

En cas d'une transformation isochore, le travail de variation du volume est nul et la chaleur échangée est égale à la variation de l'énergie interne du gaz.

3.4.2. Transformation isobare (dp = 0)

La loi simple correspondant à cette transformation, caractérisée par pression constante, est la loi de Gay-Lussac:

$$\frac{V}{T} = \text{cte} \quad \text{ou} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \qquad (3.41)$$

On représente une isobare dans le diagramme p-V par une droite parallèle à l'axe des volumes (voir Fig. 3.3.).

L'échauffement isobare est représenté par le segment 1-2 et le refroidissement, par le segment 1-3.

Le travail

On calcule le travail, en intégrant l'expression mathématique de définition, compte tenu que la pression est constante :

$$W_{12_p} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 pdV = p\int_1^2 dV = p(V_2 - V_1) \qquad (3.42)$$

Il résulte:

$$\boxed{W_{12_p} = p(V_2 - V_1) = mR(T_2 - T_1)} \qquad (3.43)$$

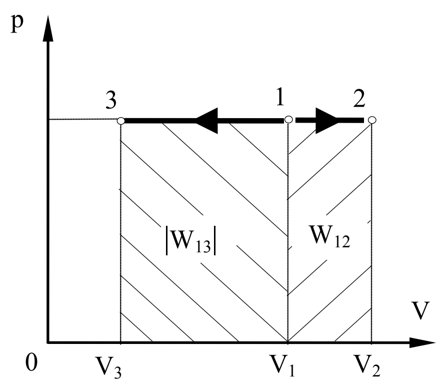


Fig. 3.3.

La chaleur

La forme différentielle du premier principe $\delta Q = dH - Vdp$, compte tenu que $dp = 0$, devient:

$$\delta Q_p = dH \qquad (3.44)$$

Il résulte:

$$\boxed{Q_{12_p} = H_2 - H_1 = mc_p(T_2 - T_1)} \qquad (3.45)$$

Conclusion

La chaleur échangée au cours d'une transformation isobare est égale à la variation de l'enthalpie du gaz.

3.4.3. Transformation isotherme (dT = 0)

Une telle transformation est décrite par la loi de Boyle-Mariotte:

$$pV = cte \qquad (3.46)$$

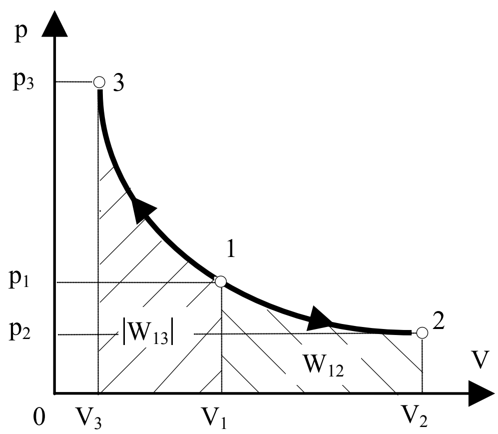


Fig. 3.4.

On représente une isotherme par une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les axes du diagramme de Clapeyron (voir Fig. 3.4.). 1-2 est une détente isotherme et 1-3, une compression isotherme.

Le travail

D'abord il est nécessaire de déterminer la loi de variation de la pression. On écrit l'expression de la loi de Boyle-Mariotte pour les états initial *1* et final *2*, aussi que pour un état intermédiaire quelconque:

$$p_1V_1 = pV = p_2V_2 = C \qquad (3.47)$$

où *C* est une constante.

$$\text{L} \quad p = \frac{C}{V} \qquad (3.48)$$

Par conséquent:

$$\delta W_T = \frac{C}{V}\,dV \tag{3.49}$$

L'intégration de (3.49) donne:

$$W_{12_T} = C\int_1^2 \frac{dV}{V} = C\,ln\frac{V_2}{V_1} \tag{3.50}$$

et en posant $C = p_1V_1$ ou $C = p_2V_2$ ou $C = mRT$, il résulte les expressions équivalentes suivantes:

$$\boxed{W_{12_T} = p_1V_1\,ln\frac{V_2}{V_1} = p_2V_2\,ln\frac{V_2}{V_1} = mRT\,ln\frac{V_2}{V_1}} \tag{3.51}$$

On peut aussi remplacer le rapport des volumes V_2 / V_1 par le rapport des pressions p_1 / p_2.

La chaleur

En appliquant le premier principe et compte tenu que $U = U(T)$ pour les gaz parfaits, il résulte que $\Delta U = 0$ et donc:

$$\boxed{Q_{12_T} = W_{12_T}} \tag{3.52}$$

Conclusions

1. **La chaleur et le travail isothermes ont des valeurs égales, c'est à dire que la conversion chaleur - travail est totale durant une telle transformation.**
2. **Malheureusement, il est inutile de réaliser une transformation isotherme réelle: sa vitesse de déroulement serait trop faible pour qu'une telle transformation ait une utilité pratique.**

3.4.4. Transformation adiabatique ($\delta Q = 0$)

La transformation adiabatique est caractérisée par l'absence de l'échange thermique: le gaz est isolé du point de vue thermique par rapport au milieu extérieur.

L'équation de la transformation

Les équations du premier principe en forme différentielle, particularisées pour cette transformation:

$$\delta q = dh - vdp = c_p dT - vdp = 0 \tag{3.53}$$

$$\delta q = du + pdv = c_v dT + pdv = 0 \tag{3.54}$$

donnent par division:

$$\frac{c_p}{c_v} = k = -\frac{v}{dv}\frac{dp}{p} \tag{3.55}$$

et par conséquent:

$$\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0 \tag{3.56}$$

L'intégration de cette équation différentielle donne successivement:

$$ln\,p + k\,ln\,v = cte$$

$$ln\left(pv^k\right) = cte$$

L $$\boxed{pv^k = cte \quad ou \quad p_1 v_1^{\;k} = p_2 v_2^{\;k}} \tag{3.57}$$

Les expressions (3.57) sont des formes équivalentes de l'équation de la transformation adiabatique. Il y a des cas où on a besoin d'écrire cette équation en utilisant les autres paires de variables (v, T) ou (p, T). Par conséquent, on déduit d'abord **la forme différentielle de l'équation d'état**:

$$pv = RT \Rightarrow \quad pdv + vdp = RdT \Rightarrow \quad pdv + vdp = pv\frac{dT}{T}$$

L $$\boxed{\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}} \tag{3.58}$$

Cette expression est très utile, car elle fait la liaison entre les différentielles des paramètres d'état.

En remplaçant successivement dans (3.56) $\frac{dp}{p}$ par $\frac{dT}{T} - \frac{dv}{v}$, respectivement $\frac{dT}{T}$ par $\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}$ on obtient finalement les autres deux formes de l'équation de la transformation adiabatique:

$$\boxed{Tv^{k-1} = cte \quad ou \quad T_1 v_1^{\;k-1} = T_2 v_2^{\;k-1}} \tag{3.59}$$

$$\boxed{\frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}} = cte \quad ou \quad \frac{T_1}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_2}{p_2^{\frac{k-1}{k}}}} \tag{3.60}$$

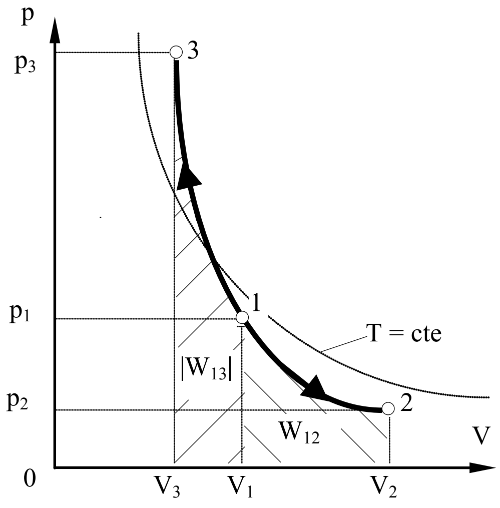


Fig. 3.5.

La représentation de la transformation dans le diagramme de Clapeyron est une hyperbole dont la pente est plus accentuée que celle de l'isotherme (voir Fig. 3.5.).

1-2 est une <u>détente adiabatique</u> et 1-3 est une <u>compression adiabatique</u>.

<u>Le travail</u>

En ce cas particulier il est possible de déterminer l'expression mathématique du travail adiabatique W_{12_a}, en appliquant le premier principe, compte tenu que l'échange de chaleur est nul ($Q_{12} = 0$):

$$W_{12_a} = -(U_2 - U_1) = -mc_v(T_2 - T_1) \tag{3.61}$$

On obtient les relations équivalentes suivantes:

$$W_{12_a} = mc_v(T_1 - T_2) = m\frac{R}{k-1}(T_1 - T_2) = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1} = \frac{p_1V_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \tag{3.62}$$

<u>Conclusion</u>:

L'échange de travail adiabatique se réalise au compte de l'énergie interne.

3.4.5. Transformation polytropique

La transformation polytropique est un transformation générale au cours de laquelle tous les paramètres d'état du gaz parfait varient et le gaz échange de la chaleur et du travail. Ceci est le cas d'une détente réelle s'éloignant de l'évolution d'une détente adiabatique théorique. Pendant cette transformation on ne peut pas contrecarrer rigoureusement l'échange de chaleur.

<u>Equation de la transformation</u>

On écrit le premier principe:

$$\delta q = du + pdv = c_v dT + pdv$$

Comme $\delta q = cdT$ et $p = RT / v$, en remplaçant ces termes dans l'équation ci-dessus on obtient:

$$(c_v - c)dT + RT\frac{dv}{v} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (c_v - c)\frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v} = 0$$

En utilisant (3.58), on écrit dv / v en fonction de dT / T et de dp / p et en appliquant la relation de Mayer (3.30) pour remplacer R, on obtient:

$$(c_v - c)\frac{dp}{p} + (c_p - c)\frac{dv}{v} = 0 \qquad (3.63)$$

En désignant par *n* le rapport $\frac{c_p - c}{c_v - c}$ (***n* - exposant polytropique**) on écrit:

$$\frac{dp}{p} + n\frac{dv}{v} = 0 \qquad (3.64)$$

et par intégration:

$$\boxed{pv^n = cte} \qquad (3.65)$$

Cette équation est **l'équation de la transformation polytropique**, que l'on peut également écrire en fonction des autres combinaisons de variables, compte tenu de la similitude avec les équations de la transformation adiabatique (*n* remplace *k*):

$$\boxed{Tv^{n-1} = cte} \qquad (3.66)$$

$$\boxed{\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = cte} \qquad (3.67)$$

Le travail

On déduit la loi de variation de la pression en écrivant les égalités:

$$p_1 V_1^n = pV^n = p_2 V_2^n = C \quad (cte) \qquad (3.68)$$

d'où:

$$p = \frac{C}{V^n} \qquad (3.69)$$

et en conséquence:

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 pdV = C\int_1^2 \frac{dV}{V^n} = \frac{C}{n-1}\left(V_1^{1-n} - V_2^{1-n}\right) \qquad (3.70)$$

En remplaçant *C* par $p_1V_1^n$ respectivement par $p_2V_2^n$ on obtient:

$$W_{12} = \frac{p_1 V_1^n V_1^{1-n} - p_2 V_2^n V_2^{1-n}}{n-1} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1} \qquad (3.71)$$

Par conséquent, le travail polytropique aura les expressions mathématiques équivalentes suivantes:

$$W_{12_{pol}} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1} = m\frac{R}{n-1}(T_1 - T_2) = m\frac{RT_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \qquad (3.72)$$

La chaleur

Pour déterminer la chaleur échangée, on calcule d'abord **la capacité calorifique polytropique** (c_n) de la transformation en utilisant la relation de définition de l'exposant polytropique:

$$n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} \qquad (3.73)$$

(il est à noter que c_n représente la capacité calorifique désignée par c à l'instant où l'exposant polytropique n'était pas défini).
Il résulte:

$$c_n = \frac{n-k}{n-1} c_v \qquad (3.74)$$

Par conséquent:

$$Q_{12_{pol}} = \int_1^2 m c_n dT = m\frac{n-k}{n-1} c_v (T_2 - T_1) = \frac{n-k}{n-1}(U_2 - U_1) \qquad (3.75)$$

Remarque:

En remplaçant n par des valeurs particulières on obtient les équations des transformations simples étudiées:

$n = 0$	L	p = cte (isobare)
$n = 1$	L	pV = cte (isotherme)
$n = k$	L	pV^k = cte (adiabatique)
$n =$) T	L	V = cte (isochore)

(dans ce dernier cas, on a remplacé pV^n = cte par $p^{\frac{1}{n}} V = \text{cte}$)

QUESTIONS

1. Expliquez les raisons des hypothèses simplificatrices introduites pour définir le gaz parfait.

2. Un gaz produit-il du travail au cours d'une détente adiabatique? Si c'est vrai, quelle est la source d'énergie nécessaire pour produire ce travail?

3. Une quantité de gaz parfait occupe dans l'état initial un volume V_0 sous la pression p_0 à la température T_0. Le gaz se détend jusqu'au volume final V: a) à température constante; b) à pression constante. En quel cas le travail produit est le plus grand?

4. La théorie cinétique des gaz considère un très grand nombre de molécules de gaz. Les gaz réels à des densités réduites se comportent comme des gaz parfaits. Ces affirmations sont-elles contradictoires? Sinon, quelles conclusions peut-on en tirer?

5. Expliquez comment pourrait-on maintenir un gaz à température constante dans un processus thermodynamique.

6. Expliquez pourquoi la température d'un gaz décroît au cours d'une détente adiabatique (voir aussi question numéro 1).

7. Expliquez pourqoui la capacité calorifique à pression constante est supérieure à la capacité calorifique à volume constant.

8. Deux quantités de gaz dont les températures et pressions initiales sont égales, sont comprimées depuis le volume initial V jusqu'au volume final V / 2, l'un adiabatiquement, l'autre isothermiquement. Dans quel cas la pression finale serait plus grande?

4. SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Appelé aussi “principe des phénomènes irréversibles”, le second principe de la thermodynamique rend compte de tous les processus thermodynamiques, en particulier ceux irréversibles, que le premier principe de la thermodynamique ne différencie pas des phénomènes irréversibles.

4.1. Insuffisances du premier principe

Le premier principe, en tant que loi générale de conservation de l’énergie, affirme la possibilité de la conversion réciproque des diverses formes d’énergie, mais ne précise pas ni les conditions de déroulement des processus thermodynamiques, ni le sens dans lequel cette conversion devient possible. On peut mettre en évidence les suivantes insuffisances du premier principe:

4.1.1. Insuffisance liée au sens d’évolution d’un système thermodynamique

Le premier principe permet, grâce à un simple bilan énergétique, de déterminer la variation de l’énergie interne d’un système au cours d’un processus qui fait passer le système d’un état initial *1* à l’état final *2*, mais il ne permet pas de faire distinguer l’état initial de l’état final. En conséquence, le processus peut se dérouler aussi bien entre *1* et *2*, qu’entre *2* et *1* sans aucune différence. En réalité, le sens d’un processus est très important car il est impossible de réaliser exactement le processus inverse sans intervention extérieure (dépense d’énergie). Par exemple, un corps chaud cédera sa chaleur à l’air environnant jusqu’à ce que sa température devienne égale à la température du milieu extérieur. Jusqu’à présent, personne n’a pas assisté à un processus spontané inverse: le corps extrait la chaleur de l’air extérieur en s’échauffant. Pourtant, cet exemple ne contredit pas le premier principe. Il est donc nécessaire d’établir la condition qui permet de préciser le sens de déroulement d’une transformation réelle, car l’expérience prouve que les processus réels se déroulent toujours dans un sens bien précisé, dont la finalité est d’atteindre l’état d’équilibre.

4.1.2. Insuffisance liée aux irréversibilités internes

L’irréversibilité interne, due aux frottements, met de nouveau en discussion le problème du sens possible d’un processus dont le réalisation directe et / ou inverse vérifie le premier principe (la conservation d’énergie). On évoque ici l’exemple d’une détente adiabatique ($Q = 0$) à partir d’un état initial *1* vers un état final *2*. Le travail

caractérisant ce processus est W_{12}. Si la détente est réversible, on peut réaliser exactement la compression (la transformation inverse), le travail correspondant $| W_{21}|$ étant exactement égal au travail W_{12}. Comme le système a regagné son état initial *1* par le même chemin, la variation de l'énergie interne au cours de la transformation fermée 1 - 2 - 1 est nulle. Ceci est le cas d'un processus réversible, impossible à réaliser matériellement. En cas d'un processus réel, l'expérience montre qu'en comprimant adiabatiquement le système en partant de l'état *2*, on n'obtient pas finalement l'état initial *1*, mais un état différent. La variation de l'énergie interne est positive ($\Delta U > 0$), ce que veut dire que les frottements internes au cours des transformations subies par le système ont converti une partie de l'énergie mécanique en énergie thermique. Pour revenir dans l'état *1*, le système doit céder cette énergie au milieu extérieur, sous forme de chaleur. Il n'est donc pas possible de récupérer intégralement la travail direct W_{12} par chemin adiabatique en cas d'un processus réel.

4.1.3. Insuffisance liée aux irréversibilités externes

Ces irréversibilités sont dues à l'échange de chaleur à différences finies de température. L'exemple cité dans œ4.1.1. est illustratif: il est impossible de refroidir un corps froid en le mettant en contact avec un corps chaud, sans dépenser de l'énergie. Le processus inverse se déroule toujours spontanément.

4.2. Cycles thermodynamiques

La transformation réciproque continue de la chaleur et du travail n'est possible que par la réalisation répétée d'un cycle thermodynamique.

Une succession de transformations d'état par l'intermédiaire de laquelle le système est ramené à l'état initial représente un **cycle thermodynamique**.

On représente un cycle thermodynamique dans les diagrammes par un contour fermé dont on attache un sens (voir Fig. 4.1.). La courbe 1 - A - 2 constitue un processus qui fournit du travail ($dV > 0$) et la courbe 2 - B - 1 correspond à un processus consommateur de travail ($dV < 0$). Les aires correspondantes sont:

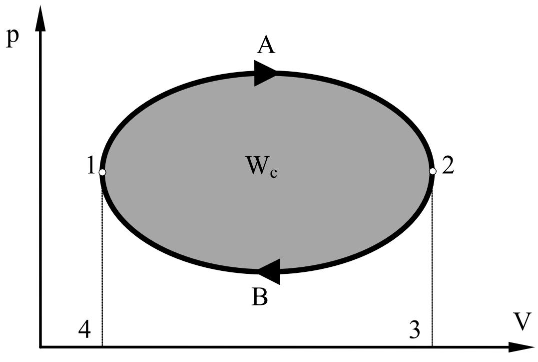


Fig. 4.1.

$$A_{1-A-2-3-4-1} = W_{1-A-2}$$

$$A_{2-B-1-4-3-2} = |W_{2-B-1}|$$

Le travail cyclique W_c est obtenu par addition:

$$W_c = W_{1-A-2} + W_{2-B-1} = W_{1-A-2} - |W_{2-B-1}| =$$

$$= A_{1-A-2-3-4-1} - A_{2-B-1-4-3-2} = A_{1-A-2-B-1} \qquad (4.1)$$

<u>Conclusion</u>: *Le travail cyclique représente dans le diagramme de Clapeyron, l'aire renfermée par le contour du cycle.*

4.2.1. Source de chaleur

Une **source de chaleur** est un corps hypothétique de capacité calorifique infinie. Tout échange thermique ne modifie guère sa température. Il y a deux types de sources de chaleur:

- **sources chaudes**: ce sont des sources avec lesqelles l'échange de chaleur se déroule à une température élevée
- **sources froides**: l'échange de chaleur avec ces sources se fait à température réduite

<u>Commentaire</u>: *D'après ce que l'on va voir, l'échange de chaleur avec une source peut se dérouler aussi bien dans un sens que dans l'autre.*

4.2.2. Equation de bilan énergétique d'un cycle

Le premier principe, écrit en forme différentielle donne:

$$\delta Q - \delta W = dU \qquad (4.2)$$

En appliquant (4.2) à un cycle ditherme (qui échange de la chaleur avec deux sources: une source chaude *SC* et une source froide *SF*) on obtient:

$$\oint \delta Q - \oint \delta W = \oint dU = 0 \qquad (4.3)$$

où:

$$\oint \delta Q = Q_c = Q_{SC} + Q_{SF} \qquad (4.4)$$

$$\oint \delta W = W_c \qquad (4.5)$$

Q_c - chaleur échangée au cours du cycle
Q_{SC} - chaleur échangée avec la source chaude
Q_{SF} - chaleur échangée avec la source froide

Par conséquent, l'équation de bilan du cycle est:

$$W_c = Q_{SC} + Q_{SF} \qquad (4.6)$$

4.2.3. Classification des cycles

4.3.2.1. Cycles moteurs

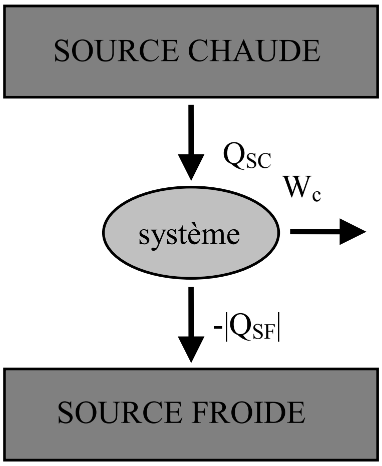


Fig. 4.2.

Ce sont des cycles qui fournissent du travail ($W_c > 0$) en recevant de la chaleur de la source chaude et en cédant de la chaleur à la source froide (voir Fig. 4.2.). Ces cycles correspondent aux machines motrices (moteurs à combustion interne, turbines à vapeur, turbines à gaz). Le sens de parcours d'un tel cycle est le sens horaire (des aiguilles d'une montre).

En ce cas, l'équation de bilan du cycle s'écrit:

$$W_C = Q_{SC} - |Q_{SF}| \qquad (4.7)$$

<u>Rendement d'un cycle moteur</u>

Le rendement thermique η_t d'un cycle moteur est le rapport de la chaleur transformée en travail W_c (gain) à la chaleur reçue de la source chaude Q_{SC} (dépense):

$$\boxed{\eta_t = \frac{W_c}{Q_{SC}} = \frac{Q_{SC} - |Q_{SF}|}{Q_{SC}} = 1 - \frac{|Q_{SF}|}{Q_{SC}}} \qquad (4.8)$$

Le rendement thermique permet d'apprécier l'efficacité de la transformation chaleur D travail par l'intermédiaire d'un cycle thermodynamique.

Le rendement thermique est toujours inférieur à l'unité ($\eta_t < 1$).

<u>Remarque</u>: La définition du rendement thermique et ses propriétés s'étendent aux cycles moteurs polythermes (qui échangent de la chaleur avec plusieurs sources de chaleur).

4.2.3.1. Cycles récepteurs

Les cycles récepteurs sont les cycles des machines réceptrices (réfrigérateurs et pompes à chaleur). Un tel cycle refroidit la source froide en consommant du travail et cède la chaleur reçue à la source chaude (voir Fig. 4.3.). Le sens de parcours d'un cycle récepteur est anti-horaire (opposé au sens de rotation des aiguilles d'une montre).

L'équation de bilan prend la forme particulière:

$$-|W_C| = -|Q_{SC}| + Q_{SF} \qquad (4.9)$$

Efficacité d'une machine frigorifique

La machine frigorifique est une machine réceptrice qui consomme du travail dans le but de refroidir l'intérieur de l'enceinte frigorifique qui joue le rôle de source froide; le milieu extérieur représente la source chaude.

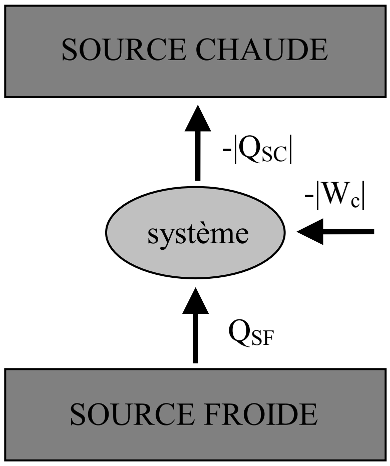


Fig. 4.3.

L'efficacité frigorifique (ε_f) est le rapport de la chaleur extraite de la source froide Q_{SF} (gain) au travail cyclique W_c (dépense):

$$\varepsilon_f = \frac{Q_{SF}}{|W_c|} \tag{4.10}$$

L'efficacité peut être inférieure, égale ou supérieure à l'unité.

Coefficient de performance d'une pompe à chaleur

La pompe à chaleur utilise le travail extérieur pour extraire de la chaleur de la source froide (le milieu extérieur en ce cas) dans le but d'échauffer la source chaude (une chambre par exemple).

Le coefficient de performance (ε_p) est le rapport de la chaleur cédée à la source chaude Q_{SC} (gain) au travail dépensé W_c (dépense):

$$\varepsilon_p = \frac{|Q_{SC}|}{|W_c|} \tag{4.11}$$

Le coefficient de performance est toujours supérieur à l'unité.

4.3. Enoncés du second principe

Le second principe peut être formulé de différentes façons, toutes équivalentes les unes aux autres. Ce sont les énoncés classiques du second principe, chacun mettant en évidence un aspect essentiel de cette loi. Les auteurs des énoncés ont emprunté leur nom aux formulations qu'ils ont attribué au second principe.

Enoncé de Carnot[1]

"La production de travail cyclique s'accompagne nécessairement de l'échange de chaleur entre l'agent thermique fluide et deux sources ayant des températures différentes"

Enoncé de Clausius[2]

"La chaleur ne passe pas d'elle même (spontanément) d'un corps froid à un corps chaud"

Cela veut dire que le passage de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud nécessite une dépense d'énergie ordonnée sous forme de travail provenant du milieu extérieur.

Enoncé de Kelvin[3]

"Il est impossible de réaliser un perpetuum mobile de deuxième espèce"

Un *perpetuum mobile* de deuxième espèce ne contredit pas le premier principe puisqu'il respecte la conservation de l'énergie. Une telle machine utilise pour source chaude le milieu ambiant dont l'énergie est pratiquement illimitée; cependant, l'absence d'une source froide est équivalente à la réalisation d'un cycle moteur monotherme, ce qui s'avère impossible. C'est pourquoi l'énergie du milieu ambiant est dite d'avoir une capacité nulle de transformation.

Le second principe fait distinction entre une forme d'énergie de transfert désordonnée (la chaleur) et une forme de transfert énergétique ordonné (le travail).

Le premier principe établit leur équivalence et le second, leur non-identité: on ne peut que produire de la chaleur en fournissant cycliquement du travail en utilisant une seule source de chaleur. Cette conclusion générale s'applique aussi aux transformations ouvertes. Par exemple, une résistance transforme l'énergie électrique (énergie ordonnée) en chaleur (énergie désordonnée), mais en chauffant une résistance on

---

[1] **Carnot, Sadi** (1796 - 1832): ingénieur français, auteur d'une seule publication "Réflexions sur la puissance motrice du feu" (1824) qui contient plus ou moins explicitement les idées fondamentales de la thermodynamique classique.

[2] **Clausius R.** (1822 - 1888): physicien allemand, auteur d'une importante contribution à la thermodynamique (formulation, en 1850, du second principe, introduction, en 1854, de la notion d'entropie) et à la théorie cinétique des gaz (1858).

[3] **Thomson W. - Lord Kelvin** (1824 - 1907): physicien anglais, proposa l'échelle de température thermodynamique et reformula le second principe.

n'obtiendra jamais un courant électrique. Ainsi, le second principe apparaît comme la loi de la dégradation de l'énergie.

4.4. Cycle de Carnot réversible. Théorème de Carnot

Le cycle de Carnot est constitué de deux transformations réversibles isothermes et de deux autres réversibles adiabatiques d'un gaz parfait (voir Fig. 4.4.). C'est un cycle ditherme entièrement réversible pouvant fonctionner aussi bien en cycle moteur qu'en cycle récepteur. L'état initial du gaz à la température t_1 est représenté par le point *1* dans le diagramme de Clapeyron. Le gaz est soumis à une détente adiabatique 1 - 2 jusqu'à ce que la température a égalé la valeur t_2. On établit le contact avec la source froide et on comprime le gaz adiabatiquement (2 -3). Celui-ci cède le chaleur Q_{SF} à température constante. On arrête la transformation en un point *3* tel qu'après la suppresion du contact thermique avec la source froide, une compression adiabatique 3 - 4 amène le gaz à l'état *4*. En mettant en contact le gaz avec la source chaude, on le soumet à une détente isothermique 4 - 1 pendant laquelle il reçoit la chaleur Q_{SC} et regagne l'état initial *1*. Le cycle décrit ci-dessus est un cycle moteur. Le cycle récepteur se déroule d'une manière inverse.

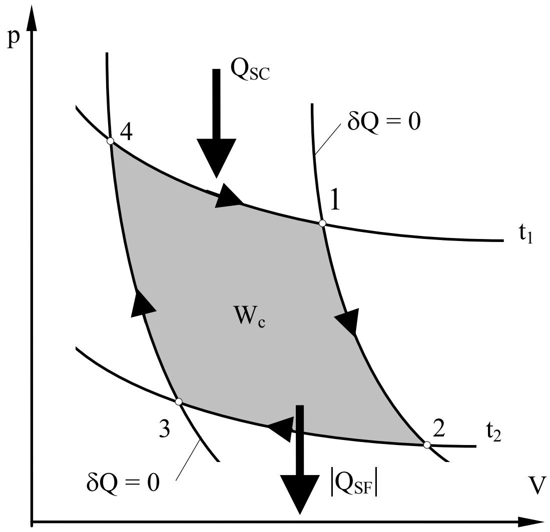


Fig. 4.4.

Théorème de Carnot

Toutes les machines thermiques dithermes réversibles fonctionnant entre deux températures données t_1 et t_2 ont le même rendement thermique quel que soit le fluide moteur.

Démonstration

Soient deux machines fonctionnant entre les mêmes températures t_1 et t_2. Pour démontrer le théorème, on suppose le contraire: $\eta_1 \neq \eta_2$. Il reste que $\eta_1 > \eta_2$ ou $\eta_1 < \eta_2$.

Démontrons que η_1 ne peut être supérieur à η_2:

On suppose que la première machine est une machine motrice ($W_1 > 0$) qui entraîne la deuxième ($W_2 < 0$; $W_1 = |W_2|$). L'hypothèse $\eta_1 > \eta_2$ conduit à:

$$\frac{W_1}{Q_{SC_1}} > \frac{|W_2|}{|Q_{SC_2}|} \qquad (4.12)$$

Puisque $W_1 = |W_2|$, il résulte que $|Q_{SC_2}| > Q_{SC_1}$ c'est à dire que la deuxième machine cède à la source chaude une quantité de chaleur Q_{SC_2} supérieure à la quantité de chaleur Q_{SC_1} reçue de la même source par la première machine. Autrement dit, la différence $|Q_{SC_2}| - Q_{SC_1} > 0$ a passé sans intervention extérieure d'un corps froid (la source froide) à un corps chaud (la source chaude), ce qui contredit l'énoncé de Clausius. Par conséquent, l'hypothèse $\eta_1 > \eta_2$ est erronée. Il reste que $\eta_1 < \eta_2$. On démontre que cette hypothèse est aussi erronée, en inversant les rôles des machines: la deuxième entraîne la première. La demonstration est similaire, en vertu de la réversibilité des cycles.

La seule possibilité qui reste est $\eta_1 = \eta_2$.

En conséquence:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{SF}|}{Q_{SC}} = f_1(t_1, t_2) \qquad (4.13)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_{SC}}{|Q_{SF}|} = f_2(t_1, t_2) \qquad (4.14)$$

En introduisant la notion de **température thermodynamique absolue**, on démontre que cette température peut être exprimée en utilisant la même échelle thermométrique que pour la température absolue (T) du gaz parfait, introduite par l'équation d'état. Le rendement du cycle de Carnot réversible deviendra:

$$\eta = 1 - \frac{T_{SF}}{T_{SC}} \qquad (4.15)$$

où T_{SF} et T_{SC} sont les températures de la source froide, respectivement de la source chaude .

4.5. Intégrale de Clausius pour un cycle réversible

L'égalité des relations (4.13) et (4.15) conduit à:

$$\frac{Q_{SC}}{T_{SC}} - \frac{|Q_{SF}|}{T_{SF}} = 0 \qquad (4.16)$$

Comme $Q_{SF} < 0$, on peut écrire:

$$\left(\frac{Q_{SC}}{T_{SC}}+\frac{Q_{SF}}{T_{SF}}\right)_r=0 \tag{4.17}$$

ou:

$$\sum\left(\frac{Q}{T}\right)_r=0 \tag{4.18}$$

La somme dans le membre gauche de (4.17) est la **fonction carnotique** du cycle.

La fonction carnotique d'un cycle de Carnot réversible est nulle.

Considérons maintenant un cycle réversible quelconque, représenté par un contour fermé (voir Fig. 4.5.). On divise le domaine du cycle en traçant un réseau d'adiabates très rapprochées l'une à l'autre. A cause du rapprochement très serré des courbes, on peut considérer les portions du cycle comprises entre deux adiabates voisines comme des transformations isothermes. Il résulte des cycles de Carnot réversibles, par exemple le cycle *i* (1 - 2 - 3 - 4 - 1), caractérisés par les échanges thermiques $Q_{SC,i}$ respectivement $Q_{SF,i}$. Cette opération correspond au remplacement du cycle initial par une réunion de *n* cycles de Carnot réversibles. Le cycle polytherme equivalent résultant échange de la chaleur avec *n* paires de sources chaudes et froides distinctes. Du point de vue énergétique, rien n'a changé; puisque les adiabates appartenant aux cycles voisins sont parcourues en sens opposés, le travail total est nul.

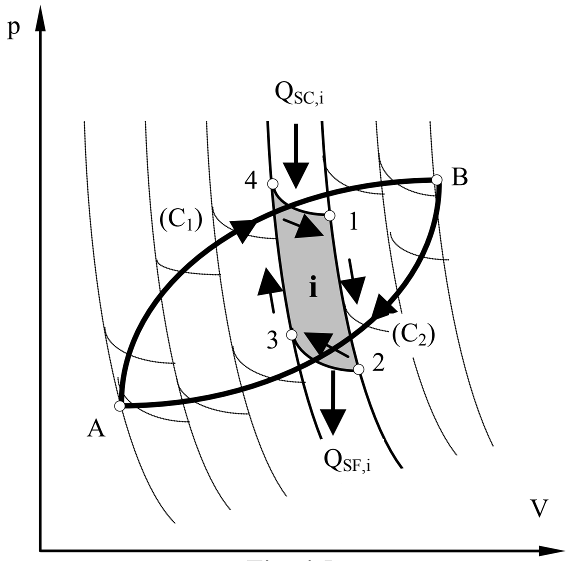


Fig. 4.5.

Par conséquent, on peut considérer que la machine initiale dont on étudie le cycle réversible, a été remplacée par une réunion équivalente de *n* machines de Carnot réversibles dont les cycles sont caractérisés par des fonctions carnotiques nulles:

$$\left(\frac{Q_{SC,i}}{T_{SC,i}}+\frac{Q_{SF,i}}{T_{SF,i}}\right)_r=0, \quad i=1,2,\ \dots,\ n \tag{4.19}$$

($T_{SC,i}$ respectivement $T_{SF,i}$ sont les températures des sources de chaleur correspondant au cycle *i*)

La somme des fonctions carnotiques des *n* cycles donne:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_{SC,i}}{T_{SC,i}}+\frac{Q_{SF,i}}{T_{SF,i}}\right)_r=0 \qquad (4.20)$$

En posant nDT, les cycles de Carnot deviennent des cycles élémentaires réversibles qui échangent les quantités élémentaires de chaleur $\delta Q_{SC,i}$ respectivement $\delta Q_{SF,i}$ avec les sources élémentaires de chaleur correspondantes dont les températures sont respectivement $T_{SC,i}$ et $T_{SF,i}$. Par conséquent, la somme de (4.20) se transforme en deux intégrales curvilignes sur les courbes (C_1) et (C_2) dont la réunion constitue le contour du cycle initial:

$$\int_{(C_1)}\left(\frac{Q_{SC}}{T_{SC}}\right)_r+\int_{(C_2)}\left(\frac{Q_{SF}}{T_{SF}}\right)_r=0 \qquad (4.21)$$

En conséquence, on peut écrire la somme des deux intégrales comme une intégrale curviligne sur le contour du cycle initial:

$$\int_{(C_1)}\left(\frac{Q_{SC}}{T_{SC}}\right)_r+\int_{(C_2)}\left(\frac{Q_{SF}}{T_{SF}}\right)_r=\oint\frac{\delta Q_r}{T} \qquad (4.22)$$

Il résulte:

$$\boxed{\oint\frac{\delta Q_r}{T}=0} \qquad (4.23)$$

L’intégrale de Clausius correspondant à un cycle réversible quelconque est nulle.

Remarques

1. L’intégrale de Clausius s’applique au système machine thermique - sources de chaleur (milieu extérieur)
2. Puisque le cycle est supposé réversible, la température T située sous l’intégrale est la température de la source élémentaire ainsi que la température de l’agent thermique qui parcourt le cycle

4.6. L’entropie. Formulation mathématique du second principe appliqué aux transformations réversibles

Soit un cycle réversible quelconque (voir Fig. 4.6.) délimité par les deux adiabates extrêmes, tangentes au contour du cycle en les points *1* et *2*.

Puisque le cycle est réversible, l’intégrale de Clausius appliquée au cycle est nulle:

$$\oint_{(C_1)\cup(C_2)} \frac{\delta Q_r}{T} = 0 \tag{4.24}$$

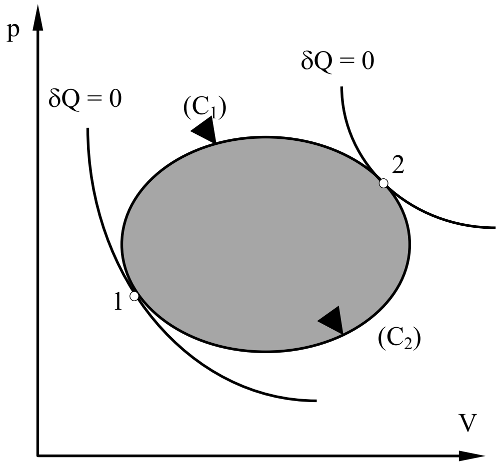


Fig. 4.6.

En décomposant l'intégrale curviligne ci-dessus en deux intégrales sur les courbes (C_1) et (C_2), on obtient:

$$\oint_{(C_1)\cup(C_2)} \frac{\delta Q_r}{T} = \int_{(C_1)} \frac{\delta Q_r}{T} + \int_{(C_2)} \frac{\delta Q_r}{T} =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_1)} + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} = 0 \tag{4.25}$$

Puisque le cycle est **entièrement réversible**, il est permis d'inverser les bornes de l'intégrale correspondant à la courbe (C_2). Autrement (c'est à dire en cas d'une transformation irréversible), cette opération est interdite parce-que l'inversion des bornes d'intégration représente du point de vue physique le déroulement inverse d'une transformation; or, en parcourant le chemin inverse d'une transformation irréversible on obtient un autre résultat que sur le chemin directe.

Par conséquent:

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_1)} + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_1)} - \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} = 0 \tag{4.26}$$

Le dernier résultat conduit à:

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_1)} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} \tag{4.27}$$

Par conséquent, l'intégrale précédente a la même valeur qu'elle soit évaluée entre les états initial *1* et final *2* le long du chemin (C_1), ou le long du chemin (C_2), ou le long de tout autre chemin **réversible** entre les deux états. L'intégrale ne dépend pas du chemin suivi et par conséquent, $\frac{\delta Q_r}{T}$ est une différentielle totale exacte.

On peut définir donc **une fonction d'état** (*S*) telle que:

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q_r}{T}} \tag{4.28}$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q_r}{T} \tag{4.29}$$

Cette fonction, définie à une constante arbitraire près, s'appelle la fonction **entropie**[1] du système. L'entropie est une grandeur <u>extensive</u> puisque son expression contient la chaleur (qui est une grandeur extensive). L'entropie est évaluée en Joules par Kelvin [J / K].

L'entropie <u>massique</u> (*s*), évaluée en J / kgK est définie par les relations:

$$ds = \frac{dS}{m} = \frac{\delta q_r}{T} \tag{4.30}$$

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{\delta q_r}{T} \tag{4.31}$$

Les relations de définition de l'entropie (4.28) ou (4.30) sont en même temps **les formulations mathématiques du second principe pour les transformations réversibles** que l'on peut écrire également:

$$\delta Q_{rev} = TdS \tag{4.32}$$

$$\delta q_{rev} = Tds \tag{4.33}$$

4.7. Intégrale de Clausius pour un cycle irréversible

Considérons deux cycles de Carnot: l'un réversible et l'autre irréversible, mais tous les deux échangeant de la chaleur aux mêmes températures T_{SC} respectivement T_{SF}.

Le second théorème de Carnot affirme que **le rendement d'un cycle ditherme réversible est toujours supérieur au rendement d'un cycle similaire irréversible (aux mêmes températures des sources chaude respectivement froide)**. Si l'on désigne par η^i le rendement du cycle irréversible, respectivement par η^r le rendement du cycle réversible, la conclusion du théorème cité s'écrit:

$$\eta^i < \eta^r$$

Compte tenu de la relation de définition du rendement d'un cycle thermodynamique, l'inégalité devient:

[1] Provenant du grec "εντροπε" (entropê) - retour, terme introduit par Rudolf Clausius en 1850

$$1-\frac{\left|Q_{SF}^{i}\right|}{Q_{SC}^{i}}<1-\frac{\left|Q_{SF}^{r}\right|}{Q_{SC}^{r}}$$

Le rendement du cycle réversible s'écrit:

$$\eta^{r}=1-\frac{T_{SF}}{T_{SC}} \tag{4.33}$$

et en portant (4.33) dans la relation précédente, on obtient:

$$1-\frac{\left|Q_{SF}^{i}\right|}{Q_{SC}^{i}}<1-\frac{T_{SF}}{T_{SC}} \tag{4.34}$$

Après les réductions nécessaires, (4.34) devient:

$$\frac{Q_{SC}^{i}}{T_{SC}}-\frac{\left|Q_{SF}^{i}\right|}{T_{SF}}<0 \tag{4.35}$$

Compte tenu que $Q_{SF}{}^{i} < 0$, on obtient finalement:

$$\frac{Q_{SC}^{i}}{T_{SC}}+\frac{Q_{SF}^{i}}{T_{SF}}<0 \tag{4.36}$$

La dernière relation affirme que **la fonction carnotique d'un cycle de Carnot irréversible, est négative**.

Il est à noter que les températures dans (4.36) sont les températures des sources de chaleur et pas celles de l'agent moteur, parce-que les échanges de chaleur sont irréversibles et donc les différences de température entre les corps participants sont finies. Par conséquent, la température de l'agent thermique est inférieure à la température de la source chaude et supérieure à la température de la source froide durant les échanges thermiques avec celles-ci.

En répétant le raisonnement appliqué au cas des cycles réversibles, on obtient:

$$\boxed{\oint\frac{\delta Q_{irr}}{T}<0} \tag{4.37}$$

L'intégrale de Clausius appliquée à un cycle irréversible est négative.

4.8. Second principe appliqué aux transformations irréversibles

Soit une transformation irréversible 1 - 2 désignée par la courbe (C_1) - voir Fig. 4.7. Considérons une transformation réversible 2 -1, désignée par la courbe (C_2). Les deux transformations constituent un cycle thermodynamique irréversible (il est suffisant d'exister une seule transformation irréversible dans un cycle pour lui transmettre le caractère d'irréversibilité). Par conséquent, l'intégrale de Clausius de ce cycle est négative:

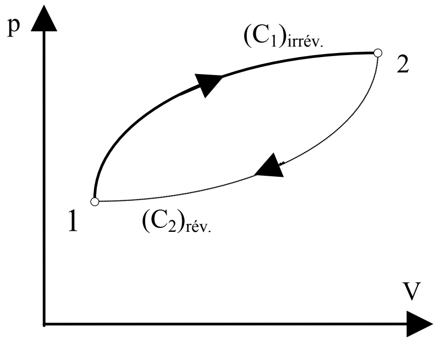


Fig. 4.7.

$$\oint_{(C_1)\cup(C_2)} \frac{\delta Q}{T} < 0 \tag{4.38}$$

En décomposant cette intégrale en deux intégrales sur les deux courbes:

$$\oint_{(C_1)\cup(C_2)} \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_{irr}}{T}\right)_{(C_1)} + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} < 0 \tag{4.39}$$

et en inversant les bornes de l'intégrale correspondant à la transformation réversible (C_2), on écrit:

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q_{irr}}{T}\right)_{(C_1)} + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_{irr}}{T}\right)_{(C_1)} - \int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} < 0 \tag{4.40}$$

Compte tenu que:

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q_r}{T}\right)_{(C_2)} = S_2 - S_1 \tag{4.41}$$

il résulte:

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q_{irr}}{T}\right) < S_2 - S_1 \tag{4.42}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta q_{irr}}{T}\right) < s_2 - s_1 \tag{4.43}$$

Par conséquent, en cas d'une transformation irréversible élémentaire:

$$\boxed{\frac{\delta Q_{irr}}{T} < dS} \tag{4.44}$$

$$\boxed{\frac{\delta q_{irr}}{T} < ds} \tag{4.45}$$

Les relations (4.44) et (4.45) représentent **les formulations mathématiques du second principe appliqué aux transformations irréversibles**.

4.9. Formulation mathématique générale du second principe

En rassemblant les expressions du second principe correspondant aux transformations réversibles et irréversibles, on obtient **la formulation mathématique générale du second principe de la thermodynamique**:

$$\boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T}} \tag{4.46}$$

$$\boxed{ds \geq \frac{\delta q}{T}} \tag{4.47}$$

L'inégalité est valable en cas d'une transformation irréversible; l'égalité correspond aux transformations réversibles.

L'intégrale $\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ s'applique aux échanges de chaleur (réversibles ou irréversibles) entre le système et le milieu extérieur représenté par une ou plusieurs sources de chaleur distinctes. Dans le cas où la transformation 1 - 2 est réversible, la température de la source est égale à la température du système; dans le cas des transformations irréversibles, les deux températures sont différentes.

Conséquences

1. ***Cas particulier des transformations adiabatiques ($\delta Q = 0$)***

En ce cas, la formulation mathématique devient:

$$dS \geq 0 \tag{4.48}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq 0 \tag{4.49}$$

En conséquence, durant une transformation adiabatique, **l'entropie ne peut pas diminuer**: elle reste constante si la transformation est réversible et augmente si la transformation est irréversible. En ce dernier cas, l'augmentation de l'entropie est due à la génération interne de chaleur δQ_{fr} causée par les frottements (source d'irréversibilité): $dS = \frac{\delta Q_{fr}}{T} > 0$. Cependant, la transformation conserve son caractère adiabatique parce-que le système n'échange pas de la chaleur avec le milieu extérieur .

2. ***Cas des systèmes isolés***

En isolant un système par rapport au milieu extérieur, on lui interdit tout échange mécanique ($\delta W = 0$) et thermique ($\delta Q = 0$). En conséquence:

$$(dS)_{syst.\ isolé} \geq 0 \qquad (4.50)$$

La dernière relation signifie que lorsque les processus qui se déroulent dans le système par suite de l'interruption de tout échange d'énergie avec le milieu extérieur sont réversibles, l'entropie du système reste constante; lorsque ces transformations sont irréversibles, l'entropie du système augmente jusqu'à une valeur maximale, correspondant à l'instauration de l'état d'équilibre interne dans le système. **L'état d'équilibre est caractérisé par la valeur maximale de l'entropie d'un système isolé**. Par conséquent, on peut considérer l'entropie comme une mesure de la dégradation de l'énergie dans le sens de la diminution de la capacité de transformation de la chaleur en travail. A l'état d'équilibre, tout échange de chaleur a cessé parce-que les températures se sont égalisées et donc il est impossible de produire du travail en utilisant la chaleur comme source d'énergie. Un système à l'état d'équilibre est "mort du point de vue thermique"[1]. En conclusion, **l'entropie constitue la mesure de l'irréversibilité des phénomènes thermiques**: elle sert d'évaluer la capacité de transformation de l'énergie thermique. Regardée sous cet aspect, l'énergie du milieu ambiant (pratiquement illimitée) a une capacité nulle de transformation.

3. ***Cas de l'échange de chaleur à différences finies de température***

Considérons un système adiabatique constitué de deux corps ayant des températures différentes T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$) qui échangent de la chaleur, le corps chaud transmettant la quantité de chaleur δQ au corps froid. Par conséquent, l'entropie du corps chaud diminue avec la quantité:

$$dS_1 = -\frac{\delta Q}{T_1} \qquad (4.51)$$

tandis que l'entropie du corps froid augmente avec la quantité:

$$dS_2 = \frac{\delta Q}{T_2} \qquad (4.52)$$

La variation totale de l'entropie du système est:

$$dS_{syst} = dS_1 + dS_2 = \delta Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \qquad (4.53)$$

Puisque $T_1 > T_2$, il résulte:

$$dS_{syst} > 0 \qquad (4.54)$$

[1] Selon la théorie de l'Univers en expansion, qui décrit l'Univers comme un ensemble isolé illimité de dimensions finies en évolution, celui-ci atteindra la mort thermique lorsque tous les échanges thermiques auraient cessé. Selon une autre théorie (moins acceptée à présent), l'Univers est infini et par conséquent, on ne peut pas lui appliquer les lois précédentes.

En conséquence, l'échange de chaleur à différences finies de température constitue une source d'irréversibilités, dont le résultat est **l'irréversibilité externe**.

4.10. Diagramme température - entropie (T - s)

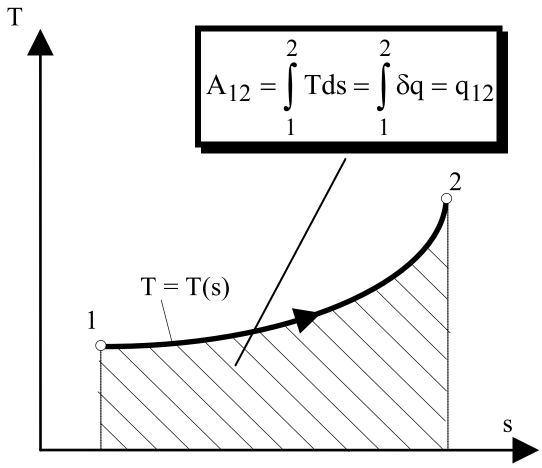


Fig. 4.8.

Le diagramme T - s (dit aussi "**diagramme calorique**") est très utile dans l'analyse des transformations thermodynamiques puisque la propriété géométrique de celui-ci permet d'évaluer directement la chaleur échangée durant un processus (voir Fig. 4.8.). La courbe correspondant à une certaine transformation réversible 1 - 2 représente la variation de la température en fonction de l'entropie massique *s*: T = T(s). L'aire A_{12} comprise entre la courbe 1 - 2, l'axe de l'entropie *Os* et les abscisses des états extrêmes, est obtenue par intégration:

$$A_{12} = \int_1^2 T(s)ds = \int_1^2 Tds \tag{4.55}$$

Mais, conformément à la formulation mathématique du premier principe:

$$Tds = \delta q \tag{4.56}$$

et par conséquent, cette aire équivaut à la chaleur massique échangée durant la transformation 1 - 2.

4.11. La variation d'entropie correspondant aux transformations thermodynamiques particulières du gaz parfait

Dans ce paragraphe nous allons déduire les expréssions particulières de la variation de l'entropie au cours des transformations simples du gaz parfait.

4.11.1. Transformation isochore (dv = 0)

La chaleur échangée est:

$$\delta q_v = c_v dT \tag{4.57}$$

et par conséquent, la différentielle de l'entropie massique devient:

$$ds_v = \frac{\delta q_v}{T} = c_v \frac{dT}{T} \tag{4.58}$$

En intégrant (4.58) on obtient l'équation de la courbe isochore dans le diagramme T - s:

$$\boxed{T = C_1 e^{\frac{s}{c_v}}} \quad (C_1 \text{ - constante}) \tag{4.59}$$

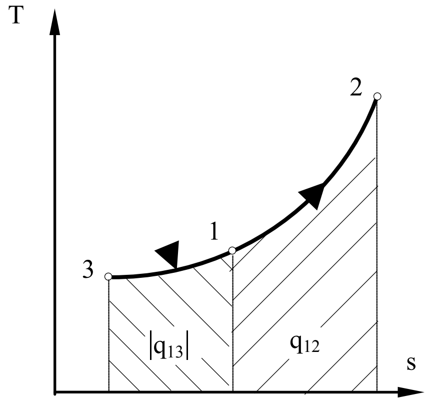


Fig. 4.9.

L'isochore est donc une courbe exponentielle dans le diagramme T - s (voir Fig. 4.9.).

1 - 2: -échauffement isochore
1 - 3: -refroidissement isochore

La variation d'entropie est:

$$\left(s_2 - s_1\right)_v = \int_1^2 ds_v = c_v \, ln \frac{T_2}{T_1} = c_v \, ln \frac{p_2}{p_1} \tag{4.60}$$

4.11.2. Transformation isobare (dp = 0)

La chaleur isobare élémentaire est:

$$\delta q_p = c_p dT \tag{4.61}$$

et donc:

$$ds_p = \frac{\delta q_p}{T} = c_p \frac{dT}{T} \tag{4.62}$$

Il résulte:

$$\boxed{T = C_2 e^{\frac{s}{c_p}}} \quad (C_2 \text{ - constante}) \tag{4.63}$$

L'isobare est donc aussi une courbe exponentielle (voir Fig. 4.10.).

1 - 2: -échauffement isobare
1 - 3: -refroidissement isobare

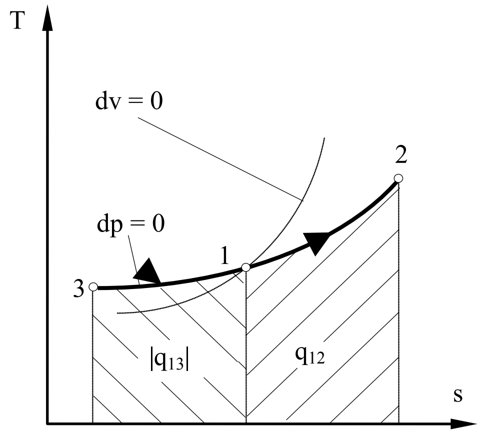


Fig. 4.10.

La pente de l'isobare est moins marquée que celle de l'isochore (représentée en pointillés pour marquer la différence).

En effet, les pentes des deux courbes en un point commun:

- isochore: $\left(\dfrac{\partial T}{\partial s}\right)_v = \dfrac{T}{c_v}$

- isobare: $\left(\dfrac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \dfrac{T}{c_p}$

sont dans la relation: $$\frac{\left(\dfrac{\partial T}{\partial s}\right)_v}{\left(\dfrac{\partial T}{\partial s}\right)_p} = \frac{c_p}{c_v} = k > 1$$

La variation d'entropie correspondant à une transformation isobare 1 - 2 est:

$$\left(s_2 - s_1\right)_p = \int_1^2 ds_p = c_p \, ln\frac{T_2}{T_1} = c_p \, ln\frac{v_2}{v_1} \qquad (4.64)$$

4.11.3. Transformation isotherme (dT = 0)

Puisque la température est constante, on représente une isotherme par une droite horizontale (voir Fig. 4.11.)

1 - 2: détente isotherme
1 - 3: compression isotherme

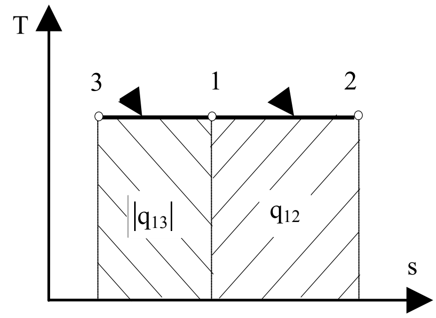


Fig. 4.11.

Compte tenu que la chaleur isotherme égale le travail, la variation d'entropie caractérisant une telle transformation est:

$$\left(s_2 - s_1\right)_T = \int_1^2 \frac{\delta q_T}{T} = \int_1^2 \frac{\delta w_T}{T} = R\,ln\frac{v_2}{v_1} = R\,ln\frac{p_1}{p_2} \qquad (4.65)$$

4.11.4. Transformation adiabatique ($\delta q = 0$)

Puisque l'entropie reste constante au cours d'une transformation adiabatique réversible, la transformation est dite "**isentropique**", c'est à dire d'entropie constante. La représentation d'une transformation isentropique se fait par une droite verticale (Fig. 4.12.).

1 - 2: détente isentropique
1 - 3: compression isentropique

Lorsque la transformation est irréversible, l'entropie augmente:
$1\text{-}2_i$: détente adiabatique irréversible: $\Delta s = s_{2i} - s_1$
$1\text{-}3_i$: compression adiabatique irréversible: $\Delta s = s_{3i} - s_1$

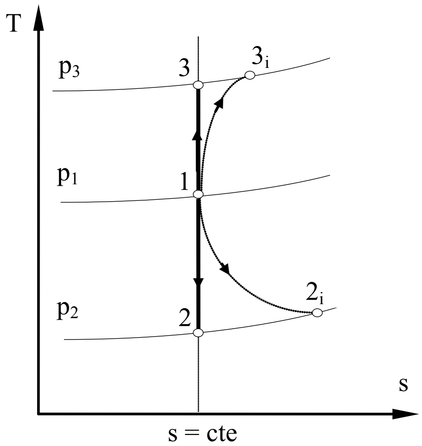


Fig. 4.12.

4.11.5. Transformation polytropique

La chaleur élémentaire est:

$$\delta q = \frac{n-k}{n-1} c_v dT \qquad (4.66)$$

et donc:

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{n-k}{n-1} c_v \frac{dT}{T} \qquad (4.67)$$

Par conséquent, en intégrant (4.67), on obtient:

$$T = C_3 e^{\frac{n-1}{n-k}\frac{s}{c_p}} \qquad (C_3 \text{ - constante}) \qquad (4.68)$$

La variation d'entropie:

$$s_2 - s_1 = \frac{n-k}{n-1} c_v\, ln\frac{T_2}{T_1} \qquad (4.69)$$

QUESTIONS

1. Pour réaliser un cycle de Carnot, on peut partir de n'importe quel point. Expliquez.

2. Si une machine de Carnot est indépendante de la substance motrice, alors probablement les machines réelles elles-aussi seront dans une certaine mesure indépendantes du fluide moteur. Pourquoi alors sommes nous tellement intéressés de trouver les combustibles adéquats (essence, gazole, charbon, matériaux de fission etc.) au lieu d'utiliser les pierres par exemple?

3. On pourrait aussi bien définir le rendement d'une machine comme $\eta = W / Q_{SF}$ au lieu de $\eta = W / Q_{SC}$? Expliquez pourquoi on ne définit pas le rendement comme ça.

4. Quels sont les facteurs qui réduisent le rendement d'une machine envers sa valeur idéale.

5. Quelle est la forme d'un cycle de Carnot dans le diagramme T - s?

6. Peut-on refroidir une chambre en laissant la porte du réfrigérateur ouverte? Expliquez.

7. Supposons que dans une enceinte se trouvent 5 molécules. Il peut se passer que par chance toutes les molécules se trouvent dans la moitié gauche de l'enceinte, l'autre moitié étant vide. Ceci représente exactement l'inverse d'une détente libre dans le vide, processus que nous avons déclaré comme irréversible. Expliquez cette contradiction.

8. Commentez l'affirmation: "Une machine thermique transforme le mouvement mécanique désordonné en mouvement mécanique ordonné".

9. Quand on rassemble les cartes de jeu dans un paquet, ou quand on pose les briques pour construire une maison, on augmente l'ordre dans la nature. Ce fait contredit-il le second principe de la thermodynamique? Expliquez.

10. Discutez le commentaire suivant: "Du point de vue de la physique formelle, il existe un seul concept asymétrique par rapport au temps, c'est à dire l'entropie. Ceci nous détermine à supposer que le second principe de la thermodynamique peut être utilisé pour préciser le sens du temps indépendamment de tout référentiel, c'est à dire que nous considérerons le sens positif du temps comme celui dans lequel le désordre croît statistiquement, ou dans lequel l'entropie augmente".

5. CYCLES THEORIQUES A GAZ PARFAIT

Dans ce chapitre nous allons étudier les cycles théoriques les plus importants. Ce sont des cycles fort simplifiés afin de faciliter l'analyse des influences exercées par les différents paramètres (constructifs et fonctionnels) sur les performances du cycle. On impose les conditions suivantes:

1. L'agent thermique qui parcourt le cycle est un gaz parfait
2. On suppose que la machine thermique qui fonctionne d'après le cycle considéré est un système fermé
3. Les capacités calorifiques à pression constante respectivement à volume constant, ne dépendent pas de la température
4. Les transformations thermodynamiques qui composent le cycle sont réversibles
5. La compression et la détente sont isentropiques
6. La combustion est remplacée par un apport de chaleur isochore, isobare ou combiné
7. L'évacuation des gaz d'échappement est remplacée par un processus fictif d'évacuation de la chaleur (isochore ou isobare selon le cas étudié)
8. La quantité d'agent thermique qui parcourt le cycle est de 1 kg

5.1. Cycles théoriques des moteurs à combustion interne

Le moteur à combustion interne est une machine thermique dans laquelle l'énergie thermique dégagée pendant la combustion (qui se déroule à l'intérieur du moteur) se transforme en énergie mécanique par l'intermédiaire du mécanisme piston - bielle - vilebrequin.

Le schéma d'un moteur à combustion interne est représenté sur la Fig. 5.1.

Les **points morts** sont les deux positions extrêmes du piston pendant une course complète.

La distance S est dite **course du piston**. **La cylindrée** (V_S) représente le volume compris entre les points morts.

Le volume de la chambre de combustion (V_c) est le volume situé au-dessus du point mort haut. **Le volume utile** ($V_u = V_S + V_c$) est le volume situé au-dessus du point mort bas.

1 - admission
2 - soupape d'admission
3 - bougie ou injecteur
4 - soupape d'échappement
5 - échappement
6 - cylindre
7 - piston
8 - bielle
9 - vilebrequin

PMH - point mort haut
PMB - point mort bas

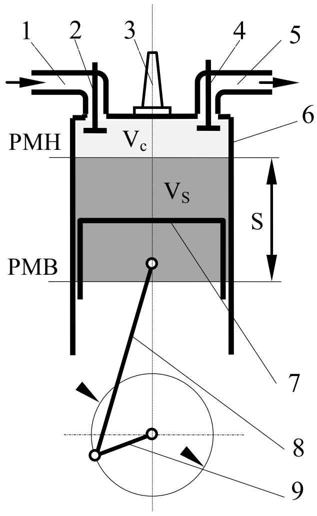


Fig. 5.1.

5.1.1. Classification des moteurs à combustion interne

On classifie les moteurs à combustion interne selon les critères suivants:

A. **Le type de combustion:**

A.1. Combustion à volume constant D cycle théorique d'*Otto*[1] - *Beau de Rochas*[2] (cycle des moteurs à explosion)
A.2. Combustion à pression constante D cycle théorique de *Diesel*[3] (cycle des moteurs Diesel lents)
A.3. Combustion mixte (volume et pression constantes) D cycle théorique de *Sabathé - Trinkler* (cycle des moteurs Diesel rapides)

B. **La modalité de réalisation de l'allumage du mélange combustible**

B.1. Moteurs à allumage par étincelle électrique (à explosion)
B.2. Moteurs à allumage par compression (Diesel)

---

[1] **Otto Nikolaus** (1832-1891) - ingénieur allemand. Il mit au point le moteur à explosion (1876)
[2] **Beau de Rochas** (1815-1893) - ingénieur français. Il prit en 1862 un brévet sur le cycle à combustion à volume constant.
[3] **Diesel Rudolf** (1858-1913) - ingénieur allemand qui a conçu et réalisé (1897) le moteur à combustion à pression constante

C. **Le lieu de formation du mélange combustible**

C.1. Avec formation extérieure: moteurs à carburateur ou à injection d'essence
C.2. Avec formation intérieure: moteurs à injection de gazole (Diesel)

D. **Le processus cyclique**

D.1. Moteurs en quatre temps: le processus cyclique se réalise pendant 2 rotations de l'arbre moteur
D.2. Moteurs en deux temps: le processus cyclique se réalise pendant 1 rotation de l'arbre moteur (un **temps** représente une course complète du piston, c'est à dire une demi-rotation de l'arbre moteur)

Désormais, nous allons analyser seulement des cycles en 4 temps (les cycles en 2 temps sont composés des mêmes transformations, mais plus courtes).

5.1.2. Cycle d'Otto - Beau de Rochas

Les étapes du cycle sont (voir Fig. 5.2.):

0 - 1 (admission) 1er temps (PMH □PMB):
La soupape d'admission est ouverte et la soupape d'échappement est fermée. Le mélange combustible est introduit dans le cylindre à cause de la dépression provoquée par l'augmentation du volume.

1 - 2 - 3 (compression isentropique + combustion) - 2e temps (PMB □PMH):
Les soupapes sont fermées. La compression isentropique se poursuit jusqu'au PMH - point 2 du diagramme, où se produit l'allumage du mélange combustible, provoqué par l'étincelle électrique produite par la bougie. Ce processus est rapide par rapport à la vitesse du piston, et l'on peut le considerer comme isochore.

3 - 4 (détente isentropique) - 3e temps (PMH □PMB):
C'est le seul temps moteur du cycle. Les soupapes sont fermées. L'agent thermique se détend, en produisant du travail.

4 - 1 - 0 (échappement) - 4e temps (PMB □PMH):
La soupape d'échappement est ouverte. Les produits de combustion sortent du cylindre librement (4 - 1) à cause de la pression supérieure qui règne dans le cylindre par rapport à la pression du milieu extérieur. La portion 1 - 0 représente l'échappement dit *forcé*, parce-que les gaz sont poussés par le piston.

Pendant les temps *1* et *4* le système est ouvert et pendant les temps *2* et *3*, celui-ci est fermé. Puisque, du point de vue du bilan énergétique, les processus d'échange de substance 0 - 1 et 1 - 0 donnent un résultat nul, seuls les processus pendant lesquels le système est fermé peuvent être considérés. C'est pourquoi il est suffisant de représenter dans les diagrammes le cycle proprement-dit 1 - 2 - 3 - 4 (Figures 5.3. et 5.4.). Ce cycle simplifié est composé des transformations:

1 - 2: compression isentropique
2 - 3: apport isochore de chaleur
3 - 4: détente isentropique
4 - 1: évacuation isochore de chaleur

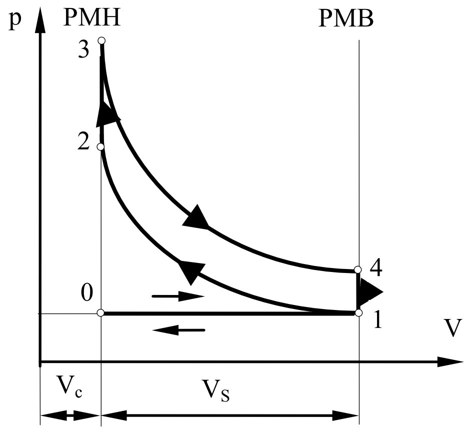


Fig. 5.2.

Rendement du cycle

On introduit le **taux de compression** (ε) défini par:

$$\varepsilon = \frac{V_u}{V_c} = \frac{V_S + V_c}{V_c} = \frac{V_1}{V_2} \tag{5.1}$$

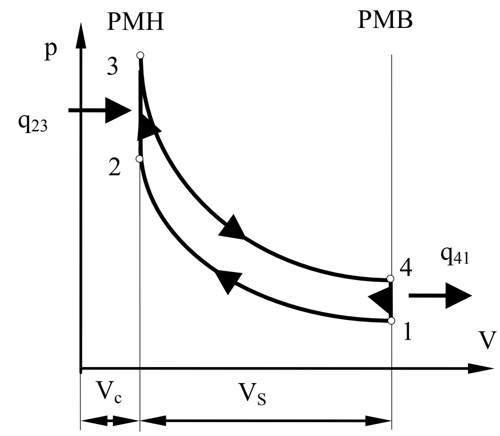


Fig. 5.3.

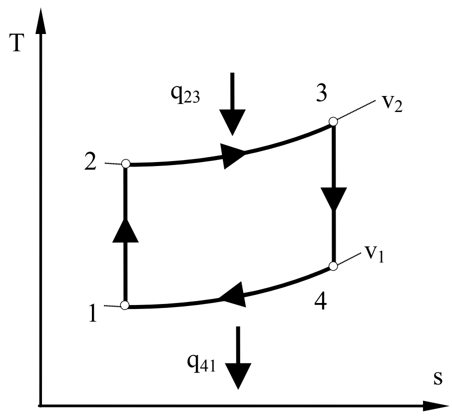


Fig. 5.4.

Le rendement du cycle est:

$$\eta = 1 - \frac{|q_{41}|}{q_{23}} \tag{5.2}$$

où q_{23} est la quantité de chaleur introduite au cours de la transformation isochore 2 - 3 et q_{41} est la chaleur évacuée pendant la transformation isochore 4 - 1.
Comme $q_{23} = c_v (T_3 - T_2)$ et $|q_{41}| = c_v (T_4 - T_1)$, on trouve:

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \tag{5.3}$$

En écrivant l'équation de la transformation isentropique 1 - 2:

$$T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1} \tag{5.4}$$

il résulte:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \tag{5.5}$$

On écrit également l'équation de la compression isentropique 3 - 4:

$$T_4 V_4^{k-1} = T_3 V_3^{k-1} \tag{5.6}$$

et on divise les équations (5.4) et (5.6) membre à membre. Compte tenu que $V_4 = V_1$ et $V_3 = V_2$, il résulte que:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \tag{5.7}$$

et on obtient finalement:

$$\boxed{\eta_v = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}} \tag{5.8}$$

Il en résulte que le rendement du cycle considéré ne dépend que du taux de compression. La dépendence, représentée dans le diagramme sur la Fig. 5.5., met en évidence une augmentation marquée du rendement pour des valeurs du taux de compression inférieures à 10. A des valeurs supérieures, le rendement augmente lentement par rapport à la croissance de *ε*. Le taux de compression est limité par les risques de **détonation** (**clicquetis** ou **cognement**), une combustion avec caractère explosif, déclenchée par l'allumage spontané du mélange combustible. **L'indice d'octane** de l'essence caractérise la résistance à la détonation.

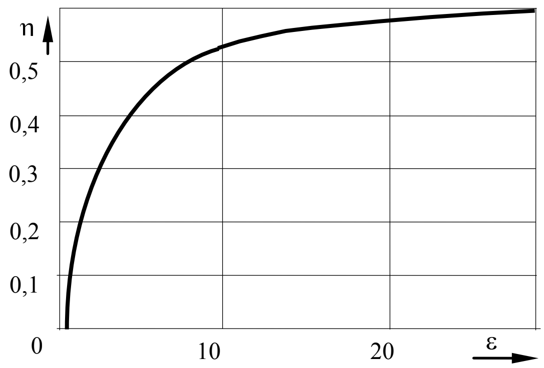


Fig. 5.5.

5.1.3. Cycle de Diesel

C'est le cycle des moteurs à allumage par compression (Diesel) lents, c'est à dire les moteurs dont la vitesse de rotation est réduite. Les étapes du cycle sont les mêmes que celles du cycle à combustion à volume constant. Les seules différences sont:

- pendant l'admission, on introduit seulement de l'air dans le cylindre
- vers la fin de la compression de l'air, on injecte le combustible (gazole) dans le cylindre. Le combustible s'allume en contact avec l'air fortement échauffé par la compression et dégage la chaleur à pression constante puisque le processus de combustion se déroule pendant la course PMH-PMB du piston.

Le cycle simplifié (sans les processus d'échange de substance) est schématisé sur les Figures 5.6. et 5.7.

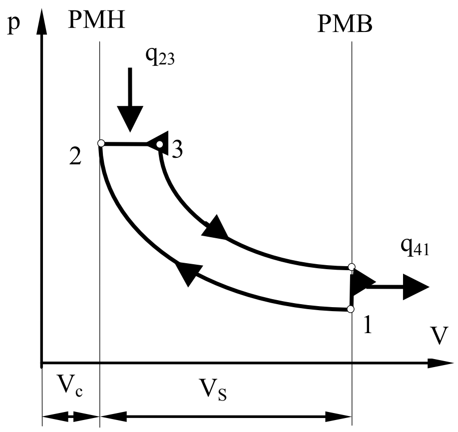


Fig. 5.6.

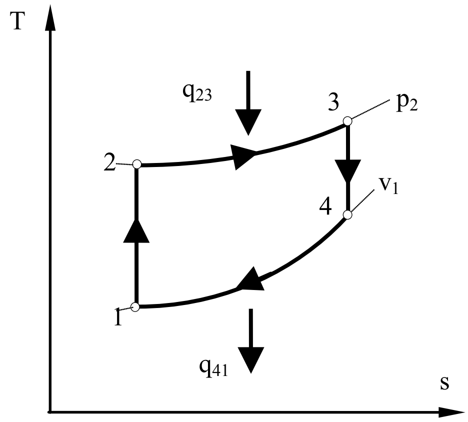


Fig. 5.7.

Les transformations composant le cycle sont:

1 - 2:	compression isentropique
2 - 3:	apport isobare de chaleur
3 - 4:	détente isentropique
4 - 1:	évacuation isochore de chaleur

Rendement du cycle

Outre le taux de compression, ce cycle est caractérisé par un deuxième paramètre fonctionnel, le **taux de détente préalable (taux d'injection)** ρ:

$$\boxed{\rho = \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}} \qquad (5.9)$$

L'expression générale du rendement (5.2), compte tenu que $q_{23} = c_p\,(T_3 - T_2)$ et que $|q_{41}| = c_v\,(T_4 - T_1)$, donne:

$$\eta = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{k}\frac{T_1}{T_2}\frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \qquad (5.10)$$

Le rapport T_1 / T_2 est égal à $1 / \varepsilon^{k-1}$ parce-que la transformation 1 - 2 est la même dans le cycle d'Otto que dans le cycle étudié. On calcule T_4 / T_1 en écrivant les équations des transformations isentropiques:

$$3 - 4: \quad T_4 V_4^{k-1} = T_3 V_3^{k-1}$$

$$1 - 2: \quad T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1}$$

En divisant les deux équations membre à membre, on trouve:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{k-1} = \frac{V_3}{V_2}\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{k} = \rho^k \qquad (5.11)$$

Par conséquent, l'expression du rendement du cycle à combustion à pression constante est:

$$\boxed{\eta_p = 1 - \frac{1}{k\varepsilon^{k-1}}\frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}} \qquad (5.12)$$

La dépendence du rendement en fonction du taux de compression ε est la même que dans le cas précédent. En prenant ε pour paramètre, les courbes de variation du rendement en fonction du taux d'injection sont du type schématisé sur la Fig. 5.8. On constate que le rendement diminue lorsque le taux d'injection augmente. Par conséquent, le taux d'injection doit être faible.

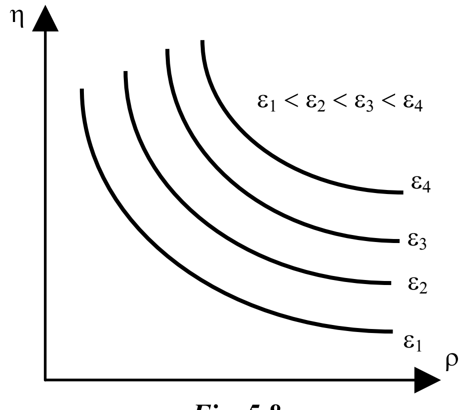


Fig. 5.8.

La compression de l'air seul ne comporte pas le risque de détonation et on peut utiliser des taux de compression ε plus élevés qu'avec le moteur à explosion, limités seulement par les efforts mécaniques que le moteur doit subir et par la croissance des frottements. Les valeurs usuelles du taux d'injection des moteurs modernes sont comprises entre 14 et 18.

5.1.4. Cycle de Sabathé-Trinkler (à combustion mixte)

C'est le cycle des moteurs Diesel rapides (à vitesse de rotation élevée). La combustion en ce cas se déroule au début à volume constant et après à pression constante. Le principe de fonctionnement est le même que celui du moteur Diesel lent: on introduit de l'air que l'on comprime et après on injecte le combustible à haute pression pour réaliser une pulvérisation très fine. Les diagrammes du cycle mixte sont présentés sur les Figures 5.9. et Fig. 5.10. Les processus sont:

1 - 2: compression isentropique
2 - 3: apport isochore de chaleur
3 - 4: apport isobare de chaleur
4 - 5: détente isentropique
5 - 1: évacuation isochore de chaleur

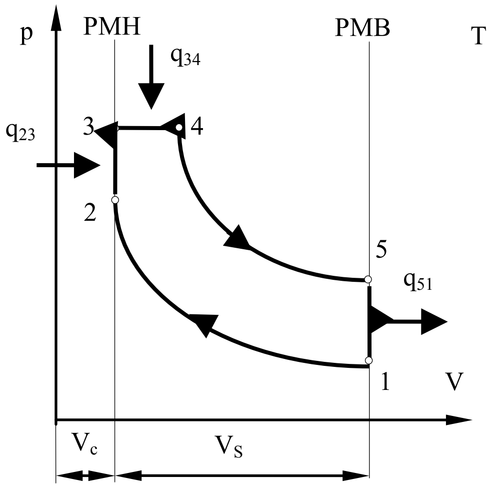


Fig. 5.9.

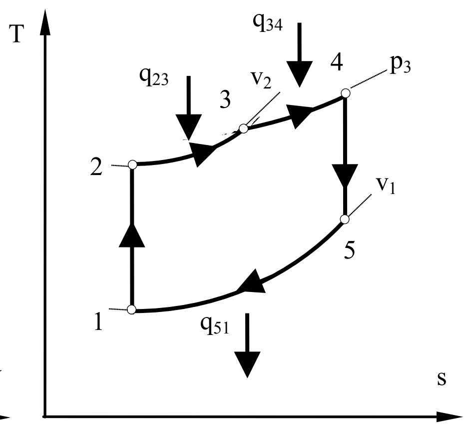


Fig. 5.10.

<u>Rendement du cycle</u>
Ce cycle est caractérisé par trois paramètres fonctionnels:

– **le taux de compression**: $\varepsilon = \dfrac{V_1}{V_2}$

– **le taux d'injection**: $\rho = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{T_3}{T_2}$

– **le taux de croissance de la pression**: $\boxed{\lambda = \frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2}}$

L'expression du rendement est:

$$\eta = 1 - \frac{|q_{51}|}{q_{23} + q_{34}} \tag{5.13}$$

où:

$$|q_{51}| = c_v(T_5 - T_1)$$
$$q_{23} = c_v(T_3 - T_2)$$
$$q_{34} = c_p(T_4 - T_3)$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_5 - T_1}{(T_3 - T_2) + k(T_4 - T_3)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\frac{\frac{T_5}{T_1} - 1}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) + k\left(\frac{T_4}{T_2} - \frac{T_3}{T_2}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{T_1}{T_2}\frac{\frac{T_5}{T_1} - 1}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) + k\frac{T_3}{T_2}\left(\frac{T_4}{T_3} - 1\right)} \tag{5.14}$$

Comme la transformation 1 - 2 est la même dans les trois cycles étudiés, le rapport T_1 / T_2 est égal à $1 / \varepsilon^{k-1}$. L'expression du rapport T_5 / T_1 est obtenue en divisant membre à membre les équations des transformations isentropiques:

5 - 1: $T_5 V_5^{k-1} = T_4 V_4^{k-1}$

1 - 2: $T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1}$

$$\Rightarrow \frac{T_5}{T_1} = \left(\frac{T_4}{T_2}\right)\left(\frac{V_4}{V_2}\right)^{k-1} = \frac{T_4}{T_3}\frac{T_3}{T_2}\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{k-1} = \rho\lambda\rho^{k-1} = \lambda\rho^k$$

L

$$\boxed{\eta_{V+p} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\frac{\lambda\rho^k - 1}{(\lambda - 1) + k\lambda(\rho - 1)}} \tag{5.15}$$

Il est à noter que lorsqu'on pose λ = 1 on obtient l'expression du rendement du cycle de Diesel; si, en outre on pose ρ = 1, on obtient la formule du rendement du cycle d'Otto.

En analysant les représentations superposées des trois cycles dans le diagramme T - s (voir Fig. 5.11.) - on pose la condition que Δs_{cycle} est la même dans tous les trois cas - on conclut que les rendements sont dans la relation:

$$\eta_v > \eta_{V+p} > \eta_p \quad (5.16)$$

Ceci s'explique par le fait qu'un cycle dont la température moyenne d'échange de chaleur avec la source chaude ($\overline{T}_{SC}$) est supérieure à la même température d'un autre cycle, est caractérisé par un rendement thermique supérieur. Cette comparaison fonctionne lorsque les deux cycles échangent de la chaleur avec la source froide à la même température moyenne $\overline{T}_{SF}$.

Il est très facile à remarquer que la température moyenne d'échange de chaleur avec la source chaude du cycle d'Otto est la plus élevée; la plus basse est celle du cycle de Diesel. Entre celles-ci se situe la température respective du cycle à combustion mixte.

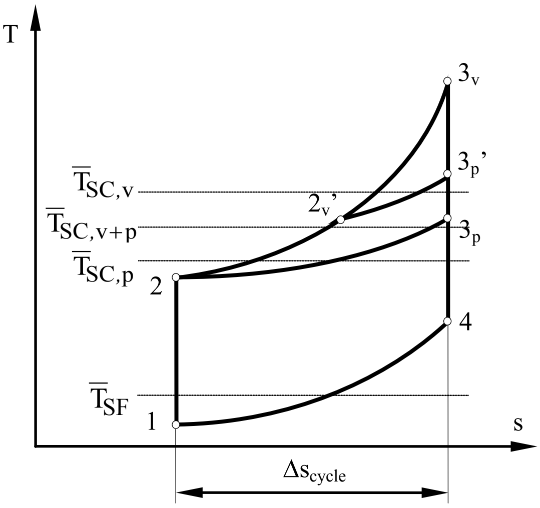


Fig. 5.11.

5.2. Cycle des turbomoteurs à gaz (cycle de Brayton)

C'est le cycle des turbines à gaz, qui sont des machines tournantes dans lesquelles l'énergie cinétique des gaz de combustion est transformée en énergie mécanique par l'intermédiaire des réseaux d'aubes fixes et mobiles. En réalité, la turbine n'est qu'une partie d'un turbomoteur qui comprend un compresseur, une chambre de combustion et la turbine, mais la terminologie usuelle tend à confondre les termes "turbine à gaz" et "turbomoteur". Les compresseurs utilisés dans les turbomoteurs sont des compresseurs tournants (dits "dynamiques"), dont le débit est élevé.

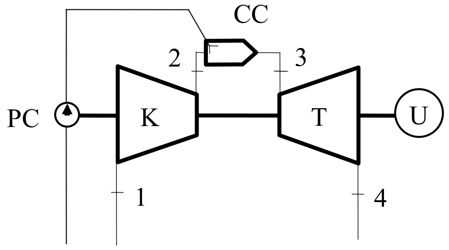


Fig. 5.12.

L'avantage du turbomoteur est dû à la simplicité constructive (machine de révolution), d'où l'encombrement réduit pour une puissance très élevée et une consommation spécifique de carburant réduite. C'est pourquoi les turbomoteurs sont très utilisés pour la propulsion des aéronefs.

Le schéma d'un turbomoteur est présenté sur la Fig. 5.12. Le cycle est un cycle ouvert, c'est à dire que la chaleur est évacuée avec les gaz d'échappement qui quittent la machine. Les éléments composants du turbomoteur sont:

K - **le compresseur**, qui augmente la pression de l'air
CC - **la chambre de combustion**, dans laquelle est injecté le carburant qui dégage par combustion la chaleur
T - **la turbine**, dans laquelle l'énergie des produits de combustion se transforme en énergie mécanique
U - **l'utilisateur** (machine entraînée par la turbine)
PC - **pompe de carburant**

Les transformations du cycle sont (voir aussi les Figures 5.13. et 5.14.):

1 - 2: **compression isentropique** de l'air (dans le compresseur) entre les pressions p_1 et p_2
2 - 3: **apport isobare de chaleur** (dans la chambre de combustion)
3 - 4: **détente isentropique** (dans la turbine) entre les pressions p_2 et p_1
4 - 1: **évacuation isobare de la chaleur** - transformation fictive qui ferme le cycle

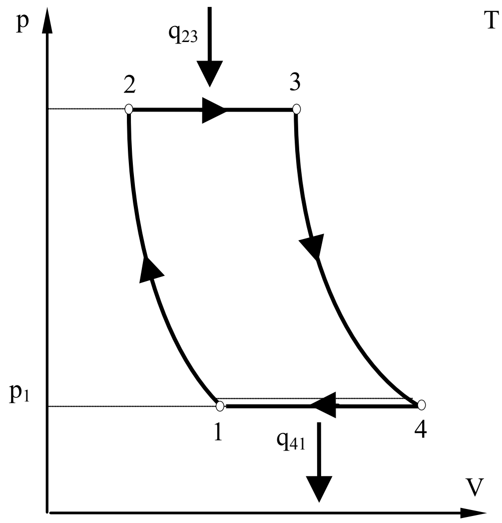


Fig. 5.13.

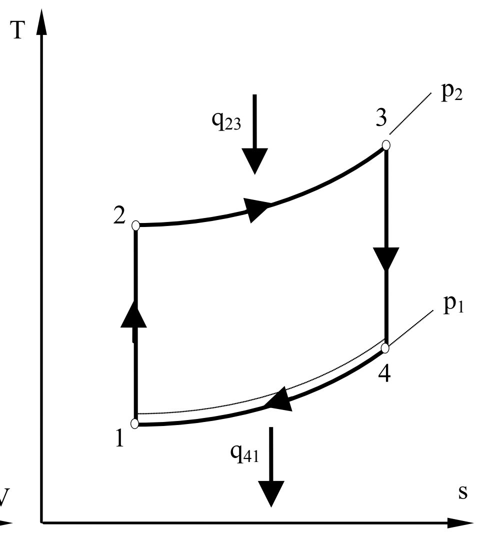


Fig. 5.14.

Désignons par π **le taux de croissance de la pression**:

$$\boxed{\pi = \frac{p_2}{p_1}} \qquad (5.18)$$

Rendement du cycle

Compte tenu que $q_{23} = c_p\,(T_3 - T_2)$ et $|q_{41}| = c_p\,(T_4 - T_1)$, l'expression du rendement donne:

$$\eta = 1 - \frac{|q_{41}|}{q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\,\frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \qquad (5.19)$$

En écrivant les équations des isentropiques 1 - 2 et 3 - 4:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{k-1}{k}} = \pi^{-\frac{k-1}{k}} \qquad (5.20)$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{k-1}{k}} = \pi^{-\frac{k-1}{k}}, \qquad (5.21)$$

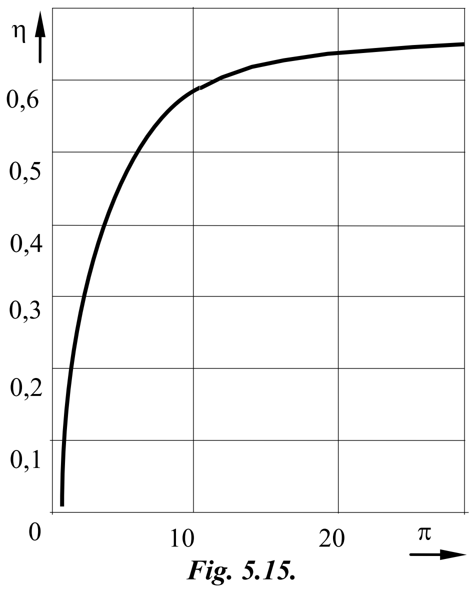


Fig. 5.15.

l'égalité des équations (5.20) et (5.21) conduit à:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \qquad (5.22)$$

d'où il résulte:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}}} \qquad (5.23)$$

Par conséquent, le rendement du cycle de Brayton augmente avec le taux de croissance de la pression (Fig. 5.15). Pour améliorer le rendement, on récupère la chaleur évacuée, en échauffant l'air de combustion. Cela réduit la consommation de carburant nécessaire pour obtenir la température T_3 à l'entrée dans la turbine.

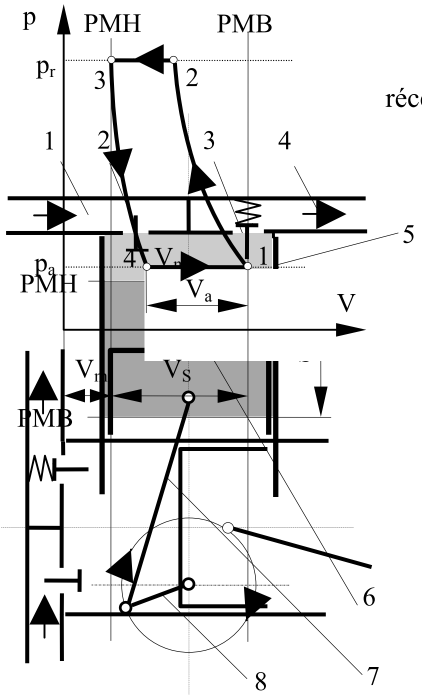


Fig. 5.17.

Fig. 5.16.

5.3. Cycles des compresseurs à piston

Les compresseurs sont des machines réceptrices qui augmentent la pression des agents gazeux, opération qui se poursuit en général par un transvasement du fluide comprimé.

Les compresseurs sont de 2 types, **volumiques**, ou **dynamiques**.

Les compresseurs volumiques compriment le gaz par la diminution du volume de l'enceinte qui le contient. Les compresseurs dynamiques compriment le fluide par la transformation de l'énergie cinétique de celui-ci en énergie potentiellle de pression. Les compresseurs à piston appartiennent à la classe des compresseurs volumiques.

Un compresseur à piston est très semblable à un moteur à combustion interne: la seule différence est que le compresseur est entraîné par un moteur, donc il reçoit de l'énergie mécanique provenant du milieu extérieur. Ces machines sont classifiées en compresseurs à un étage et compresseurs à plusieurs étages.

5.3.1. Le compresseur à un étage

Le schéma d'une telle machine est présenté sur la Fig. 5.16.

1 - tubulure d'aspiration
2 - soupape d'aspiration
3 - soupape de refoulement
4 - tubulure de refoulement
5 - cylindre
6 - piston
7 - bielle
8 - manivelle

V_S est **la cylindrée** et V_m est le volume de l'espace mort. *L'espace mort représente le volume situé au-dessus du PMH.* Il est nécessaire de prévoir cet espace afin d'assurer la course des soupapes et les dilatations thermiques du système manivelle - bielle - piston.

Le cycle fonctionnel du compresseur correspond à une rotation complète de la manivelle et est présenté sur la Fig. 5.17. Les transformations qui composent le cycle sont:

1 - 2: **compression polytropique** entre la pression d'aspiration p_a et la pression de refoulement p_r.

2 - 3: **refoulement isobare**. En *2*, la force de pression du gaz comprimé devient supérieure à la résistance du ressort de la soupape de refoulement. Celle-ci s'ouvre, permettant le refoulement du gaz par la conduite de refoulement. La position du point *3* du diagramme correspond au PMH: la soupape de refoulement ferme l'orifice de refoulement. Dans l'espace mort il reste une quantité de gaz dont la pression est égale à p_r.

3 - 4: **détente polytropique** du gaz renfermé dans l'espace mort jusqu'à la pression d'aspiration.

4 - 1: **aspiration isobare**: En *4*, la soupape d'aspiration ouvre l'orifice d'admission et une nouvelle tranche de gaz entre à pression constante dans le cylindre.

La différence V_1 - V_4, désignée par V_a, représente **le volume de gaz aspiré**. On désigne par π **le taux de compression**:

$$\boxed{\pi = \frac{p_r}{p_a} = \frac{p_2}{p_1}}.$$

On définit deux paramètres fonctionnels:

– **l'espace mort rélatif** (ε):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{V_m}{V_s} = \frac{V_3}{V_1 - V_3}} \tag{5.23}$$

– **le coefficient de remplissage** (μ):

$$\boxed{\mu = \frac{V_a}{V_s} = \frac{V_1 - V_4}{V_1 - V_3}} \tag{5.24}$$

Afin de calculer le travail cyclique W_c, on suppose que les exposants polytropiques de la compression n_c et de la détente n_d sont égaux: $n_c = n_d = n$. Le travail cyclique est la somme des quantités de travail correspondant aux transformations du cycle:

$$W_c = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \tag{5.25}$$

où: $$W_{12} = \frac{mR}{n-1}\left(T_1 - T_2\right)$$

$$W_{23} = p_2\left(V_3 - V_2\right) = mR\left(T_3 - T_2\right)$$

$$W_{34} = \frac{mR}{n-1}\left(T_3 - T_4\right)$$
$$W_{41} = p_1\left(V_1 - V_4\right) = mR\left(T_1 - T_4\right)$$

$$\Rightarrow W_c = mR\left[\frac{1}{n-1}\left(T_1 - T_2\right) + T_3 - T_2 + \frac{1}{n-1}\left(T_3 - T_4\right) + T_1 - T_4\right] =$$
$$= mR\frac{n}{n-1}\left[\left(T_1 - T_2\right) - \left(T_4 - T_3\right)\right] = \frac{n}{n-1}\left[mRT_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - mRT_4\left(1 - \frac{T_3}{T_4}\right)\right]$$

mais: $$\frac{T_1}{p_1^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{T_2}{p_2^{\frac{n-1}{n}}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \pi^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\frac{T_3}{p_2^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{T_4}{p_1^{\frac{n-1}{n}}} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \pi^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\Rightarrow W_c = \frac{n}{n-1}\left[p_1V_1\left(1 - \pi^{\frac{n-1}{n}}\right) - p_1V_4\left(1 - \pi^{\frac{n-1}{n}}\right)\right] = \frac{n}{n-1}p_1\left(V_1 - V_4\right)\left(1 - \pi^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_c = \frac{n}{n-1}p_1V_a\left(1 - \pi^{\frac{n-1}{n}}\right)} \quad [\text{J / cycle}] \tag{5.26}$$

Le travail cyclique absorbé par un compresseur polycylindrique (composé de *i* cylindres) est:

$$\boxed{W_{c,i} = iW_c = i\frac{n}{n-1}p_1V_a\left(1 - \pi^{\frac{n-1}{n}}\right)} \tag{5.27}$$

Pression maximale de refoulement

Sur la Fig. 5.18. on a tracé trois cycles caractérisés par les mêmes pressions d'aspiration, cylindrée et volume de l'espace mort, mais dont les pressions de refoulement sont dans la relation: $p_r' < p_r'' < p_r'''$. On constate que plus la pression de refoulement est élevée, plus le volume aspiré est faible: $V_a' > V_a'' > V_a'''$. A la limite, quand $p_r = p_{r,max}$, $V_a = 0$ et le cycle se réduit à deux transformations polytropiques 1 - 2 (compression) et 2 -1 (détente). Le compresseur ne fournit plus de gaz (le volume refoulé est aussi nul); le gaz de l'espace mort est comprimé et se détend successivement. Afin de déterminer la pression maximale $p_{r,max}$, on pose $\mu = 0$ ($V_a = 0 \Rightarrow \mu = 0$):

$$\mu = \frac{V_1 - V_4}{V_1 - V_3} = \frac{V_1 - V_3 + V_3 - V_4}{V_1 - V_3} =$$

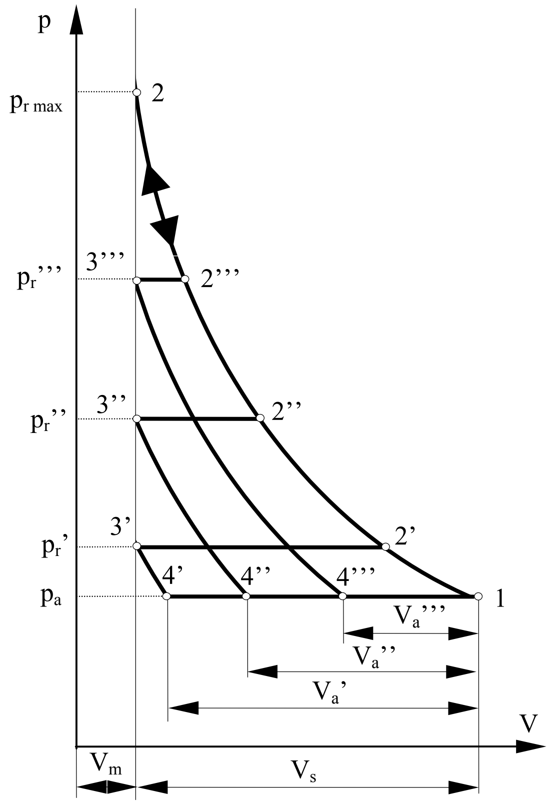
$$= 1 + \frac{V_3 - V_4}{V_1 - V_3} = 1 + \frac{1 - \dfrac{V_4}{V_3}}{\dfrac{V_1 - V_3}{V_3}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \dfrac{V_4}{V_3}}{\dfrac{1}{\varepsilon}} = 1 + \varepsilon\left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right)$$

Mais:

$$p_1 V_4^n = p_2 V_3^n \Rightarrow \frac{V_4}{V_3} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} = \pi^{\frac{1}{n}}$$

et par conséquent, l'expression du coefficient de remplissage devient:



$$\mu = 1 + \varepsilon\left(1 - \pi^{\frac{1}{n}}\right) \tag{5.28}$$

Maintenant, en posant $\mu = 0$, on obtient la valeur du taux de compression maximal π_{max}:

$$\pi_{max} = \frac{p_{r,max}}{p_a} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \tag{5.29}$$

Par conséquent, l'expression mathématique de la pression de refoulement maximale est:

$$p_{r,max} = p_a \pi_{max} = p_a\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \tag{5.30}$$

5.3.2. Le compresseur à plusieurs étages

L'existence d'une pression maximale limite le dégré de compression du gaz que l'on peut obtenir dans un seul étage de compression. Par conséquent, lorsque la pression exigée par l'utilisateur dépasse $p_{r,max}$, il faut comprimer le gaz en deux ou plusieurs étages. En comprimant un gaz, celui-ci s'échauffe et par conséquent sa température augmente; il est nécessaire donc de le refroidir entre les étages du compresseur afin d'éviter le péril d'inflammation de l'huile lubrifiante de la machine. Un autre effet bénéfique du refroidissement intermédiaire est la réduction du travail cyclique, donc une économie de travail. Afin de maximiser cette économie, considérons le cas d'un compresseur à deux étages avec un refroidissement intermédiaire du gaz comprimé dans le premier étage jusqu'à la température initiale (d'aspiration). Fig. 5.19. présente le schéma du compresseur et la portion du cycle contenant les transformations dans les deux étages et le refroidissement isobare subi par le gaz.

Le gaz est comprimé dans le premier étage depuis la pression p_1 jusqu'à la pression intermédiaire p_x (point $2_x'$ dans le diagramme). Ensuite, le gaz est refroidi dans le refroidisseur intermédiaire (*RI*) jusqu'à la température initiale T_1 (transformation $2_x'$ - 2_x). Dans le deuxiéme étage, la compression se poursuit jusqu'à la pression exigée p_2 (transformation 2_x - 2). On constate que cette succession de transformations conduit à l'obtention d'une économie de travail (aire en gris) par rapport à la compression directe de p_1 à p_2 (transformation 1 - 2''). Le problème qui se pose est de déterminer la valeur de la pression intermédiaire p_x telle que l'économie de travail soit maximale.

On impose les conditions suivantes:

– les exposants polytropiques des compressions dans les deux étages sont égaux: $n_I = n_{II} = n$

- on suppose que le compresseur est un compresseur dit "**théorique**", c'est à dire sans espace mort. Par conséquent, le volume aspiré V_a dans un étage égale la cylindrée: $V_{aI} = V_1$; $V_{aII} = V_{2x}$

Le travail cyclique total est la somme des quantités de travail absorbées dans les deux étages:

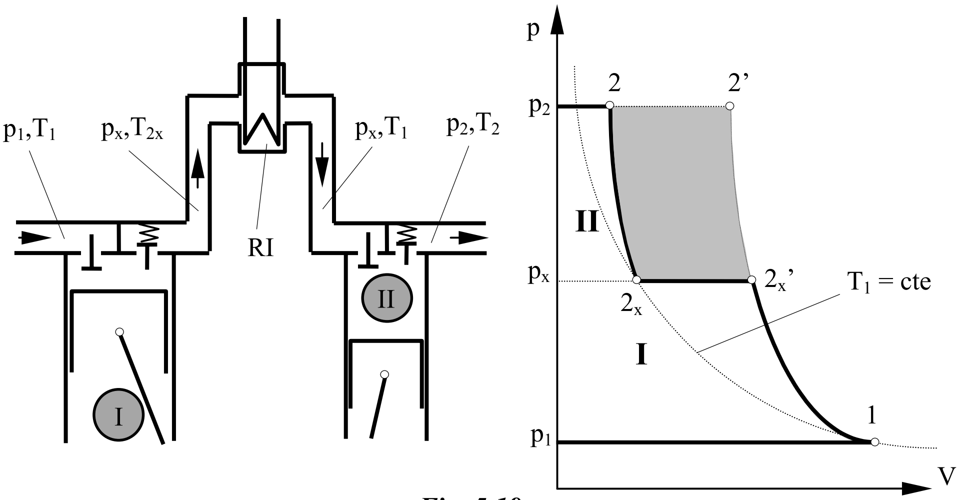


Fig. 5.19.

$$W_c = W_{c,I} + W_{c,II} = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left(1 - \pi_I^{\frac{n-1}{n}}\right) + \frac{n}{n-1} p_x V_{2x} \left(1 - \pi_{II}^{\frac{n-1}{n}}\right) \tag{5.31}$$

Puisque le refroidissement amène le gaz à la température initiale ($T_{2x} = T_1$) les états 1 et 2_x se situent sur l'isotherme T_1 et donc $p_1 V_1 = p_x V_{2_x}$. En conséquence, (5.31) devient:

$$W_c = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left(2 - \pi_I^{\frac{n-1}{n}} - \pi_{II}^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left[2 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \tag{5.32}$$

La condition $W_c = W_{c\ minimum}$ équivaut à:

$$\frac{\partial W_c}{\partial p_x} = 0 \tag{5.33}$$

c'est à dire:

$$\frac{\partial}{\partial p_x}\left[2 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = 0 \tag{5.34}$$

La dernière condition, après les réductions nécessaires, donne:

$$p_x = \sqrt{p_1 p_2} \tag{5.35}$$

ou:

$$\frac{p_x}{p_1} = \frac{p_2}{p_x} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{\pi} \tag{5.36}$$

Par conséquent:

$$\pi_I = \pi_{II} = \sqrt{\pi} \tag{5.37}$$

où π_I et π_{II} sont **les taux partiels de compression** et π désigne **le taux total de compression**.

On peur généraliser ce résultat dans le cas d'un compresseur à *z* étages:

$$\boxed{\pi_j = \sqrt[z]{\pi} = \sqrt[z]{\frac{p_2}{p_1}} \qquad j = 1,2,\ \dots\ ,z} \tag{5.38}$$

Le travail cyclique s'écrit:

$$\boxed{W_c = zW_{c_j} = z\frac{n}{n-1}p_1V_1\left(1-\pi_j^{\frac{n-1}{n}}\right) = z\frac{n}{n-1}p_1V_1\left(1-\pi^{\frac{n-1}{nz}}\right)} \tag{5.39}$$

QUESTIONS

1. Les cycles théoriques sont les représentations extrêmement simplifiées des cycles réels, donc très loin des évolutions réelles. Expliquez l'utilité des cycles théoriques.

2. Expliquez quelle influence exerce chaque hypothèse simplificatrice sur l'analyse des cycles théoriques.

3. Toutes les machines dont les cycles théoriques sont analysées, sont des systèmes ouverts et pourtant on les considère comme des systèmes fermés. Expliquez pourquoi.

4. Auquel type de processus thermodynamique correspondent les évolutions réelles de compression et de détente?

5. Expliquez pourquoi dans l'analyse des cycles théoriques des moteurs à combustion interne à piston il est permis d'ignorer les processus 0 - 1 (admission) et 1 - 0 (échappement).

6. Dans le fonctionnement des moteurs à combustion interne, les soupapes s'ouvrent avant le moment théorique d'ouverture et ferment après le moment théorique de fermeture. Expliquez pourquoi.

7. Pourqoui est-il préférable d'utiliser les compresseurs dynamiques dans les turbomoteurs à gaz?

8. Comment utiliseriez vous l'effet réactif des turboréacteurs d'un avion pour le freinage après l'atterissage?

9. Pour réduire le travail absorbé par un compresseur à piston, il est nécessaire de le refroidir intensément. Expliquez.

6. GAZ REELS

On a vu que tout gaz réel vérifie l'équation d'état des gaz parfaits lorsque sa pression est réduite et sa température est élevée. Le problème qui se pose est de vérifier l'équation d'état pour des pressions élevées et des températures réduites. Cette vérification se fait par l'intermédiaire du **facteur de compressibilité** *z*, défini par:

$$z = \frac{pV}{RT} \tag{6.1}$$

Dans le tableau ci-dessus on présente les valeurs du facteur de compressibilité à 0^oC pour quelques gaz sous pressions différentes:

Gaz	z		
	p = 0,1 atm	p = 1 atm	p = 50 atm
H_2	1,0002	1,0007	1,09
He	1	1,0001	1,025
O_2	1	0,999	0,957
N_2	0,9999	0,9993	0,9840
CO_2	0,9993	0,993	0,9308
CH_4	1	0,9987	0,8824

Plus la pression est élevée, plus le facteur de compressibilité s'écarte de la valeur unitaire correspondant aux gaz parfaits. Ceci s'explique par la diminution des distances moyennes entre les molécules, dont le résultat est l'augmentation des forces intermoléculaires.

6.1. Courbes d'Andrews

Les écarts entre les gaz réels et le gaz parfait ont été mis en évidence par nombreuses expériences. L'une des plus connues est l'expérience de Thomas Andrews (1869) qui a fait des recherches sur la compression isotherme des gaz réels. En comprimant très lentement (pratiquement isothermiquement) le dioxyde de carbone, Andrews a tracé les courbes de compression pour diverses températures (Fig. 6.1.).

Prenons par exemple la courbe *I*. L'état initial étant *A*, au fur et à mesure que la compression avance, la pression du gaz augmente lentement jusqu'au point *B* où la liquéfaction du gaz commence. Durant la liquéfaction, la pression reste constante et le volume diminue à mesure que la proportion de gaz décroît et que la proportion de liquide augmente (**palier de liquéfaction** B - C). L'état *C* correspond à la fin de la

liquéfaction: tout le gaz s'est transformé en liquide. Le point *B* correspond à l'état de **vapeur saturante**, dont l'abscisse *v''* représente le volume massique. Le point *C* caractérise le liquide saturé, dont l'abscisse est le volume massique *v'*. En comprimant le liquide résulté (portion C - D de l'isotherme), la pression de celui-ci augmente brusquement à cause de la très faible compressibilité des liquides.

En reprenant la compression isotherme à des températures de plus en plus élevées, on constate que la longueur du palier de liquéfaction diminue (*v'* augmente et *v''* décroît). Finalement, à la température dite **température critique** (T_{cr}) le palier B - C se réduit à un seul point *K*, dit **point critique**: en ce point, les volumes massiques du liquide saturé et de la vapeur saturante sont égaux (v' = v'') - la liquéfaction s'est déroulée sans variation du volume massique de la substance (courbe *II*). L'isotherme critique T_{cr} présente en *K* un point d'inflexion avec tangente horizontale.

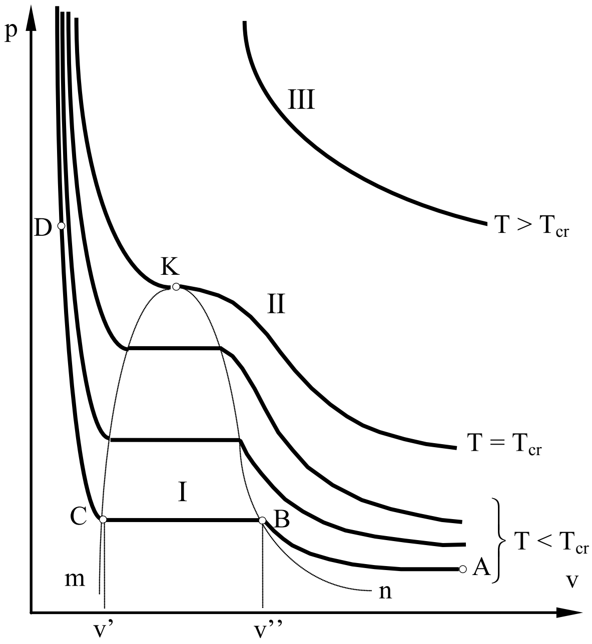


Fig. 6.1.

Andrews a mis en évidence que le phénomène de liquéfaction n'apparaît plus lorsqu'on comprime isothermiquement le gaz à des températures supérieures à la température critique (courbe *III*)

Il est impossible de liquéfier un gaz en le comprimant isothermiquement au dessus du point critique.

Les isothermes supracritiques conservent le point d'inflexion, mais la tangente n'est plus horizontale. A des températures très supérieures au point critique, les isothermes deviennent des hyperboles équilatères: on peut assimiler le gaz réel à un gaz parfait.

La courbe qui relie les extrémités des paliers s'appelle **courbe de saturation** et est composée de deux branches: K - m (branche liquide) et K - n (branche vapeur). L'isotherme critique est tangente à la courbe de saturation dans le point critique.

La courbe de saturation divise le domaine du diagramme en trois régions (voir Fig. 6.2.):

- *région de la phase liquide* (L) - à gauche par rapport à l'isotherme critique et à la branche liquide K - m

- *région de la phase gazeuse* (G) - située à droite par rapport à l'isotherme critique et à la branche vapeur K - n de la courbe de saturation
- *région de coexistence des deux phases* (L + V: liquide + vapeur saturante = **fluide hétérogène**) - située entre les deux branches de la courbe de saturation. Dans cette région se déroule la transition de phase.

Notons qu'on peut mettre en évidence un sous-domaine (V_S) de la région G, compris entre la branche vapeur et l'isotherme critique. Ce domaine, dit *domaine de la vapeur surchauffée*, correspond au gaz qui peut être liquéfié par compression isothermique.

Les régions extérieures par rapport à la courbe de saturation sont celles du **fluide homogène** (soit-il liquide ou gazeux).

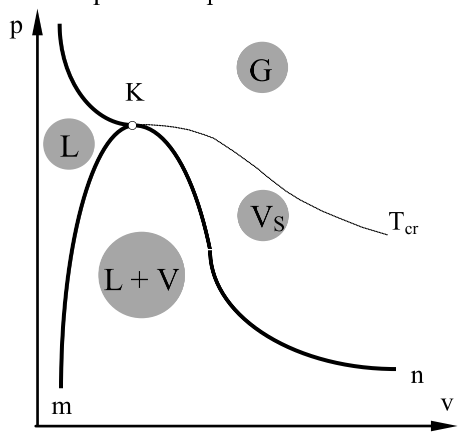


Fig. 6.2.

L'équation d'état des gaz parfaits pv = RT ne peut pas réfléchir les particularités du comportement des gaz réels. On a élaboré des formes diverses de l'équation d'état, dont la finalité était d'en donner une description aussi complète que possible. Les expressions mathématiques de ces équations sont d'autant plus compliquées, que la description du comportement du gaz réel est plus correcte et complète. L'une des plus importantes, bien que moins précise, est l'équation de Van der Waals.

6.2. Equation de Van der Waals

En 1873, Johannes Van der Waals[1] a déduit une équation d'état pour les gaz réels en utilisant les résultats de la théorie cinétique des gaz. Il a ajouté deux termes corréctifs à l'équation d'état des gaz parfaits, tenant compte du volume propre des molécules et des forces intermoléculaires:

1. Le volume libre pour le mouvement des molécules est, dans le cas du gaz parfait, le volume *v* occupé par le gaz (les molécules sont supposées des points matériels). En cas d'un gaz réel, il faut tenir compte du volume propre des molécules, dit **covolume** (*b*). En conséquence, le volume libre pour le mouvement des molécules diminue avec le covolume: v* = v - b (v* - volume libre)

[1] **Van der Waals J**. (1837-1923) - physicien néerlandais, prix Nobel en 1910. Il a des contributions remarquables dans l'étude des forces intermoléculaires (forces Van der Waals). Il proposa l'équation d'état qui porte son nom et énonça la loi des états correspondants.

2. En dehors des collisions, il existe toujours des interactions à distance entre les molécules, dues à des dissymétries de la distribution des charges électriques dans la molécule. Les forces d'attraction résultantes produisent une pression supplémentaire, dite **pression interne** (ou **de cohésion**): p_c. Van der Waals a démontré que cette pression est proportionnelle à $1 / v^2$ et par conséquent, la pression totale p^* est la somme des pressions cinétique p (du gaz parfait) et de cohésion p_c: $p^* = p + p_c$.

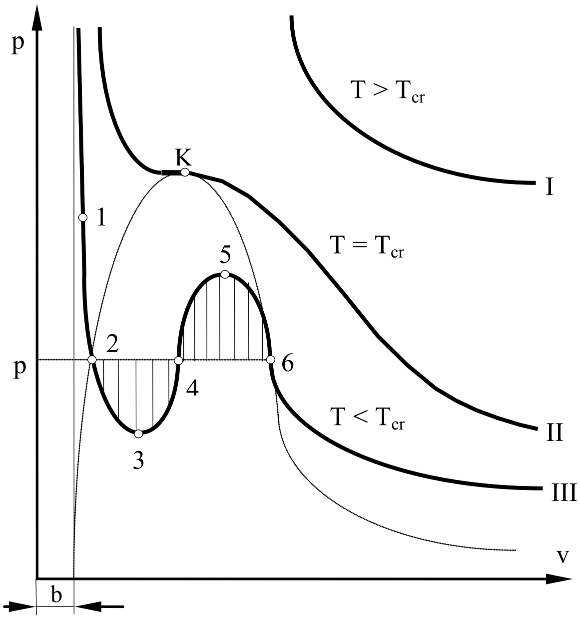


Fig. 6.3.

Formellement, l'équation de Van der Waals a la même expression mathématique que l'équation d'état des gaz parfaits:

$$p^* v^* = RT \qquad (6.2)$$

mais, compte tenu que $p^* = p + p_c = p + a / v^2$ et que $v^* = v - b$, l'équation devient:

$$\boxed{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT} \qquad (6.3)$$

Les constantes *a* et *b* sont des caractéristiques du gaz réel considéré.

On peut récrire l'équation (6.3) sous la forme suivante:

$$v^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0 \qquad (6.4)$$

Cette équation de troisième dégré a trois racines réelles quand $T < T_{cr}$ ou une racine réelle et deux imaginaires quand $T > T_{cr}$. En représentant l'équation de Van der Waals dans le diagramme p - v pour des valeurs différentes de la température, on obtient des courbes dites **isothermes de Van der Waals**, comme sur la Fig. 6.3. Les courbes typiques sont (en fonction de la valeur de la température):

a) $T > T_{cr}$ (courbe *I*): l'équation (6.4) a deux racines imaginaires et une réelle, qui représente le volume effectivement occupé par le gaz. Plus la température est élevée, plus l'allure de la courbe devient semblable à l'allure des isothermes du gaz parfait (hyperbole équilatère).

b) $T = T_{cr}$ (courbe *II*): l'équation (6.4) a trois racines réelles identiques correspondant au volume critique v_{cr}. La tangente à l'isotherme critique dans le point critique *K* est horizontale et la courbe a un point d'inflexion.

c) $T < T_{cr}$ (courbe *III*): l'équation (6.4) a trois racines rélles distinctes. Dans les domaines homogènes, l'isotherme de Van der Waals a la même allure que l'isotherme d'Andrews (obtenue par expérience). Dans le domaine hétérogène, l'isotherme de Van der Waals présente un minimum (point *3*) et un maximum (point *5*). La portion 3 - 4 - 5 n'a pas de signification physique parce-que $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T > 0$, ce qui contredit la réalité (on ne peut pas avoir une augmentation simultanée de la pression et du volume). Les portions 2 - 3 (liquide surchauffé) et 5 - 6 (vapeur surrefroidie) représentent les états métastables du liquide et de la vapeur. En réalité, la liquéfaction se déroule à pression constante - le palier 2 - 4 - 6. La position du palier est telle que les aires 2 - 3 - 4 - 2 et 4 - 5 - 6 - 4 sont égales (règle de Maxwell). Les discordances entre les isothermes de Van der Waals et les isothermes d'Andrews dans le domaine hétérogène sont dues au fait que l'équation de Van der Waals décrit un fluide homogène, tandis que pendant la liquéfaction, le système est biphasé (hétérogène).

6.2.1. Forme réduite de l'équation de Van der Waals. Loi de états correspondants

Dans le point critique (point d'inflexion à tangente horizontale), les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_{cr}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T_{cr}} = 0$$

Les deux conditions ci-dessus et l'équation de Van der Waals forment un système de trois équations dont la solution est représentée par les trois constantes *a*, *b* et *R*:

$$a = 3p_{cr} v_{cr}^2; \quad b = \frac{v_{cr}}{3}; \quad R = \frac{8}{3}\frac{p_{cr} v_{cr}}{T_{cr}} \tag{6.5}$$

En connaissant les paramètres du point critique d'un gaz Van der Waals (qui vérifie l'équation de Van der Waals), on peut calculer les constantes *a*, *b* et *R* à l'aide des relations (6.5). On remplace les constantes dans l'équation de Van der Waals et on écrit:

$$\left(p + \frac{3p_{cr} v_{cr}^2}{v^2}\right)\left(v - \frac{v_{cr}}{3}\right) = \frac{8}{3}\frac{p_{cr} v_{cr}}{T_{cr}} T \tag{6.6}$$

En divisant (6.6) par $p_{cr}v_{cr}$ on trouve:

$$\left(p+\frac{3}{v_r^2}\right)(3v_r-1)=8T_r \tag{6.7}$$

où $p_r=\frac{p}{p_{cr}}$, $v_r=\frac{v}{v_{cr}}$ et $T_r=\frac{T}{T_{cr}}$ sont dits **paramètres réduits**. L'équation (6.7) est **la forme réduite de l'équation de Van der Waals**.

Cette équation ne contient que des coefficients indépendants de la nature du gaz. Par conséquent, l'équation (6.7) est valable pour tous les gaz Van der Waals (qui vérifient l'équation de Van der Waals).

Les états de deux ou plusieurs gaz dont les paramètres réduits réspectifs sont identiques, sont appelés **des états correspondants**. L'équation (6.7) assure que:

Lorsque deux paramètres réduits des deux fluides sont égaux, il en est alors de même pour le troisième.

Ceci est l'énoncé de la **loi des états coréspondants** (de **la similitude thermodynamique**).

L'avantage de l'équation de Van der Waals en forme réduite est la possibilité de grouper en *familles similaires* les fluides Van der Waals ayant les mêmes paramètres réduits. Il suffira donc de faire une mesure sur un seul représentant de la famille pour extrapoler le résulat aux autres fluides de la famille.

D'autres équations, basées sur les données expérimentales ont été proposées, mais l'équation de Van der Waals reste la plus pratique.

6.3. Vapeur

Le terme **phase** désigne un corps homogène du point de vue physique, constituant une partie d'un système hétérogène. Les phases sont délimitées par des surfaces séparatrices au niveau desquelles les propriétés physiques subissent des variations brusques (discontinuités). Un exemple typique de système polyphasique est celui d'un corps pur qui se vaporise: les deux phases du système sont le liquide et la vapeur. Il existe un seul état dans lequel la coexistence des trois phases (solide, liquide et vapeur) est possible: **le point triple** (par exemple, les paramètres du point triple de l'eau pure sont: p_{tr} = 0,0006108 bar: t_{tr} = 0,0078 ^{o}C). L'état d'équilibre liquide-vapeur au cours de la vaporisation est dit **état de saturation**. La température de vaporisation est dite **température de saturation** (t_s) et est dépendante de la pression: plus la pression est élevée, plus la température de saturation est élevée.

6.3.1. Le processus de vaporisation à pression constante

Considérons un cylindre contenant 1 kg d'eau pure, renfermée par un piston auquel on applique une force constante pour assurer une pression constante (voir Fig. 6.4.). On chauffe l'eau et on mesure le volume massique occupé par celle-ci. Les états typiques du processus sont:

1: C'est l'état initial. La température initiale de l'eau est t_1 et le volume massique initial est v_1 .

2: La température devient égale à la température de saturation t_s. Le volume a augmenté très peu. C'est l'état de début de la vaporisation (le liquide est dit **liquide saturé**).

3: La température est toujours égale à la température de saturation. Une partie du liquide s'est vaporisée. Le système est hétérogène car il est composé de deux phases en équilibre: le liquide saturé et la vapeur saturante. Pour désigner un système hétérogène liquide + vapeur au cours de la vaporisation, on utilise le terme **vapeur saturante humide**. Le volume v_3 du système a augmenté sensiblement puisque le volume de la vapeur est bien supérieur au volume du liquide ($v'' >> v'$).

4: Toute l'eau s'est vaporisée. La température est encore égale à la température de saturation. Le volume v'' du système, redevenu homogène (une seule phase est présente: la vapeur saturante dite **sèche**) est très grand par rapport au volume initial. La ligne 2 - 3 - 4 représente le **palier de vaporisation**.

5: En échauffant la vapeur saturante sèche, la température de celle-ci augmente ($t_5 > t_s$). Le volume augmente, mais pas trop. La vapeur est dite **surchauffée**.

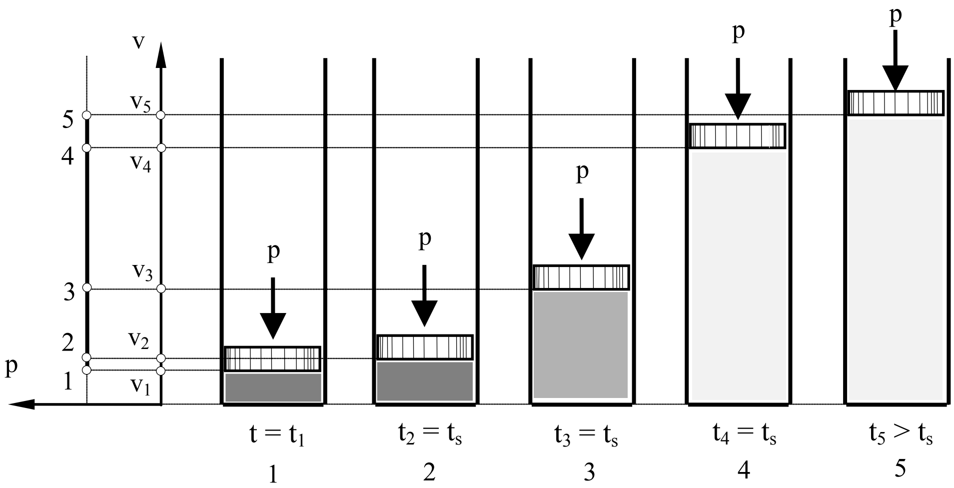


Fig. 6.4.

En répétant l’expérience décrite ci-dessus sous des pressions de plus en plus élevées, on obtient le diagramme de la Fig. 6.5. On constate qu’en augmentant la pression, le palier de vaporisation diminue $\left(p_2 > p_1 \Rightarrow \overline{2'2''} < \overline{1'1''}\right)$. Il existe une pression dite **critique** (p_{cr}), sous laquelle le palier de vaporisation se réduit à un point, dit **point critique** (*K*). Sous cette pression, la vaporisation se produit sans variation de volume massique. La température de saturation correspondante est **la température critique**.

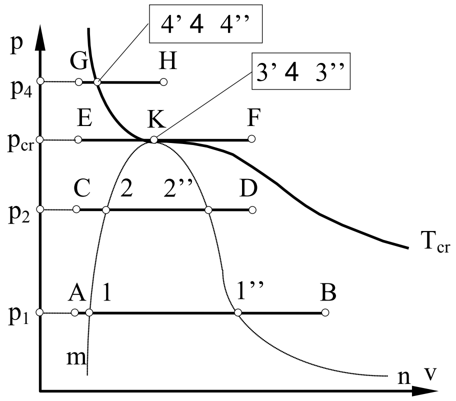


Fig. 6.5.

Sous des pressions **supracritiques**, c’est à dire supérieures à la pression critique ($p_4 > p_{cr}$), la vaporisation se produit toujours à la température critique et sans variation de volume (4’ 4 4’’). En reliant les extrémités des paliers de vaporisation, on obtient la courbe en cloche m - K - n, dite **courbe de saturation** (m - K: **branche liquide**; K - n: **branche vapeur**). On a obtenu ainsi par une autre méthode, le même diagramme que celui obtenu par la compression isotherme d’un gaz réel.

Fig. 6.6. présente les mêmes courbes de vaporisation que la figure précédente, mais dans le diagramme T - s. Il résulte une courbe de saturation en cloche similaire à la courbe de saturation du diagramme p - v, mais dont les branches sont symétriques.

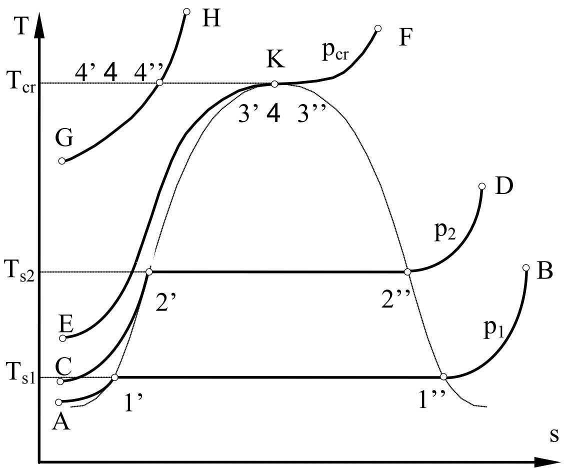


Fig. 6.6.

Les domaines du diagramme sont:

− **le domaine liquide**, compris entre l’isotherme critique T_{cr} et la branche liquide de la courbe de saturation

− **le domaine gazeux**, situé au dessus de l’isotherme critique et à droite par rapport à la branche vapeur de la courbe de saturation

− **le domaine biphasé** (liquide + vapeur), compris entre les branches de la courbe de saturation

Le sous-domaine de la vapeur surchauffée est délimité par la branche vapeur et l’isotherme critique.

6.3.2. Grandeurs de la vapeur saturante humide. Titre en vapeur

Au cours de la vaporisation, les deux phases (liquide et vapeur) coexistent en conditions d'équilibre. Le système hétérogène est désigné sous le nom de "*vapeur saturante humide*". La vaporisation est un processus en même temps isotherme et isobare, donc seules la pression et la température ne peuvent pas définir univoquement l'état du système. Il est nécessaire d'introduire un nouveau paramètre d'état, caractéristique aux systèmes hétérogènes, la **concentration massique**. En ce cas, la concentration de la phase gazeuse est dite **titre en vapeur** (*x*) et la concentration de la phase liquide est dite **humidité** (*y*). Celles-ci sont définies par les relations:

$$x = \frac{m_v}{m_l + m_v}; \quad 0 \le x \le 1 \tag{6.8}$$

$$y = \frac{m_l}{m_l + m_v} = 1 - x \tag{6.9}$$

où: m_v - masse de la vapeur saturante
m_l - masse du liquide

On déduit les expressions mathématiques des grandeurs massiques du système hétérogène (vapeur saturante humide) comme suit:

$$G = G_l + G_v$$

$$\Rightarrow mg = m_l g' + m_v g''$$

$$\Rightarrow g = \frac{m_l}{m} g' + \frac{m_v}{m} g'' = yg' + xg'' = (1 - x)g' + xg'' = g' + x(g'' - g')$$

$$\Rightarrow g = g' + x(g'' - g') \tag{6.10}$$

où: G - grandeur extensive
$g = \frac{G}{m}$ - grandeur massique correspondant à la grandeur extensive *G*
m - masse totale du système ($m = m_l + m_v$)
g' - grandeur massique du liquide saturé
g'' - grandeur massique de la vapeur saturante sèche

Par conséquent, on trouve:

$$\boxed{v = v' + x(v'' - v')} \tag{6.11}$$

$$\boxed{h = h' + x(h'' - h')} \tag{6.12}$$

$$\boxed{s = s' + x(s'' - s')} \tag{6.13}$$

Compte tenu que le processus est isobare-isotherme, la chaleur nécessaire pour la vaporisation, dite **chaleur latente de vaporisation** (*r*) est égale à la variation de

l'enthalpie entre l'état initial (liquide saturé) et l'état final (vapeur saturante sèche). D'autre part, l'expression mathématique du second principe $\delta q = Tds$, appliquée à la transformation isotherme donne:

$$q = T\left(s_{final} - s_{initial}\right)$$

et donc, dans le cas de la vaporisation, on écrit :

$$r = h'' - h' = T_s\left(s'' - s'\right) \qquad (6.14)$$

En conséquence, les relations (6.12) et (6.13) peuvent être écrites dans les formes équivalentes:

$$\boxed{h = h' + x\left(h'' - h'\right) = h' + xr} \qquad (6.15)$$

$$\boxed{s = s' + x\left(s'' - s'\right) = s' + x\frac{r}{T_s}} \qquad (6.16)$$

En utilisant les équations (6.11) et (6.16), on peut tracer **les courbes de titre en vapeur constant**, en donnant des valeurs précisées au titre *x* et en calculant *v* respectivement *s* (les valeurs correspondant au liquide saturé, respectivement celles correspondant à la vapeur saturante sèche sont systématisées dans des tableaux dits **tableaux de vapeur**). Il résulte les diagrammes sur les Figures 6.7. et 6.8. Les branches de la courbe de saturation deviennent respectivement x = 0 (branche liquide) et x = 1 (branche vapeur).

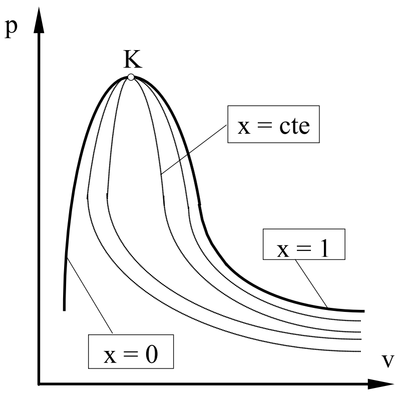


Fig. 6.7.

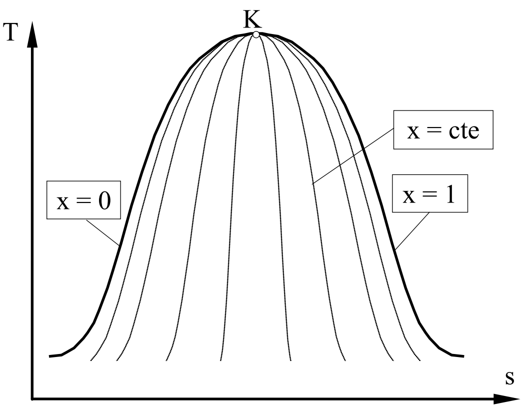


Fig. 6.8.

6.3.3. Diagrammes de la vapeur

Fig. 6.9. présente le **diagramme p - v** de la vapeur d'eau et Fig. 6.10. contient le **diagramme T - s** de la même substance.

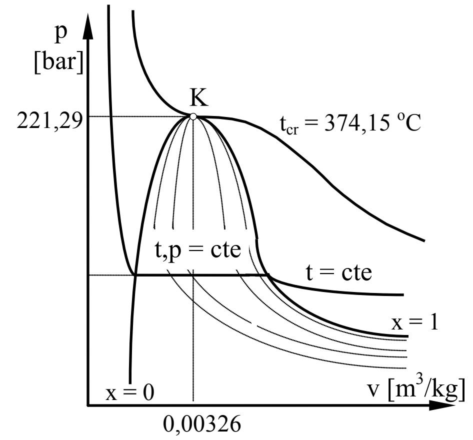


Fig. 6.9.

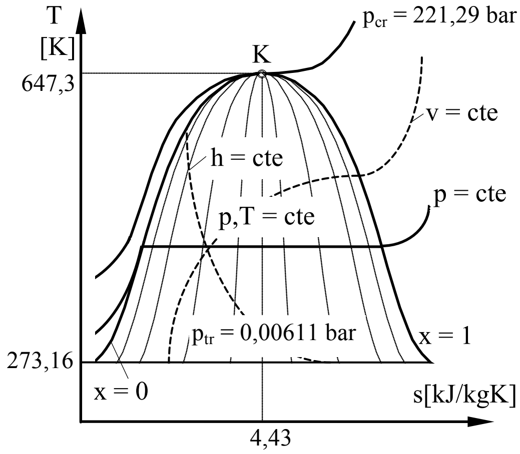


Fig. 6.10.

Outre le diagramme T - s, on utilise très souvent un autre diagramme entropique, dit **diagramme de Mollier (h - s)**, schématisé sur la Fig. 6.11. Ce diagramme contient les courbes paramétriques suivantes:

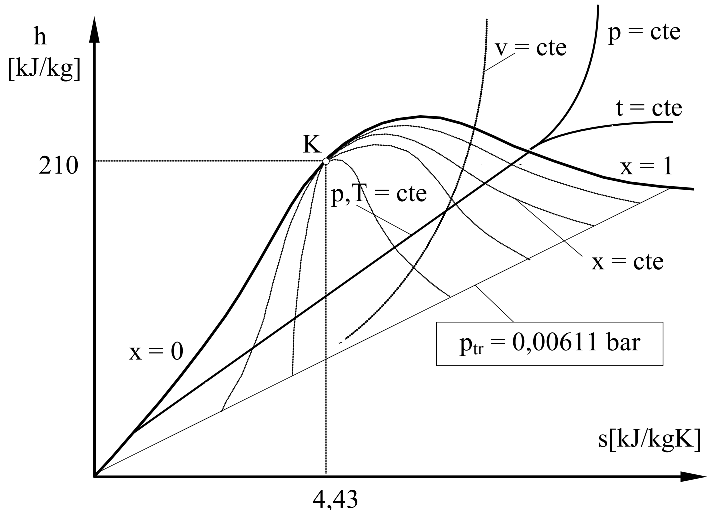


Fig. 6.11.

– p = cte (isobares): dans le domaine hétérogène ce sont des droites dont la pente est proportionnelle à la valeur de la pression. Dans le domaine situé au-dessus de la branche liquide x = 1, les isobares sont des courbes exponentielles.

– t = cte (isothermes): les isothermes de la vapeur saturante humide

sont identiques aux isobares puisque la vaporisation est un phénomène isobare-isotherme. Dans le domaine de la vapeur surchauffée, les isothermes deviennent des courbes distinctes par rapport aux isobares.

– v = cte (isochores): ce sont des courbes exponentielles dont la pente est supérieure à la pente des isobares.

6.3.4. Cycles moteurs à vapeur

Les centrales thermiques modernes utilisent les équipements motrices à vapeur dans lesquels la combustion de charbon, fuel ou gaz fournit la chaleur nécessaire à la vaporisation de l'eau. La détente de la vapeur fait tourner une turbine qui fournit l'énergie mécanique qui est transformée en énergie électrique par l'intermédiaire d'un générateur. On utilise de l'eau pour agent thermique à cause de son coût réduit.

Une centrale thermique est composée des éléments suivants (chacun d'entre eux assure une transformation du cycle):

- un **générateur de vapeur** (dit **chaudière** en cas des centrales classiques, dans lesquelles la chaleur est obtenue par combustion). Dans le générateur de vapeur l'eau est échauffée jusqu'à la température de saturation, ensuite est vaporisée et la vapeur résultante est éventuellement surchauffée.
- une **turbine** dans laquelle la vapeur se détend en produisant de l'energie mécanique.
- un **condenseur** dans lequel la vapeur qui sort de la turbine se condense en cédant la chaleur latente de condensation à l'agent de refroidissement.
- une **pompe** dans laquelle la pression de l'eau est augmentée jusqu'à la valeur exigée.

A. *Cycle de Rankine*[1]

Bien que pas utilisé à présent à cause de son faible rendement, ce cycle (dérivé du cycle de Carnot) sert pour mieux comprendre le fonctionnement d'une centrale thermique et met en évidence les voies d'amélioration du rendement.

Notons que l'utilisation d'un agent thermique qui subit une transition de phase liquide - vapeur représente le seul cas où on peut réaliser un cycle de Carnot: la vaporisation et la condensation isobares sont en même temps **isothermes** et la réalisation des transformations adiabatiques ne pose pas des problèmes. Cependant, l'écart étroit de températures imposé par les paramètres critiques faibles de l'eau et les influences négatives dues aux irréversibilités diminuent le rendement global jusqu'à des valeurs inacceptables. En conséquence, il est préférable d'utiliser des cycles dérivés dont la température moyenne à la source chaude est plus élevée, assurant un

[1] **Rankine W.J.M.** (1820-1872): ingénieur et physicien britannique, connu pour ses travaux sur la thermodynamique, l'énergétique (dont il est le créateur) etc.

rendement supérieur.

La structure de l'installation est schématisée sur la Fig. 6.12. et le cycle est représenté sur la Fig. 6.13. La signification des symboles est:

- C - chaudière
- T - turbine à vapeur
- GE - générateur électrique
- K - condenseur
- P - pompe

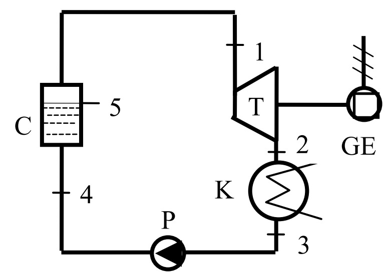


Fig. 6.12.

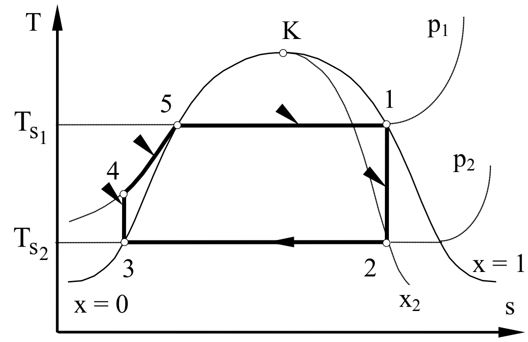


Fig. 6.13.

Les processus composant le cycle sont:

1 - 2: <u>détente isentropique</u> dans la turbine *T*: la vapeur saturante sèche provenant de la chaudière se détend dans la turbine entre les pressions p_1 et p_2, en produisant le travail technique W_t

2 -3: <u>condensation isobare-isotherme</u> dans le condenseur *K*: la vapeur saturante humide de titre x_2 se condense à pression constante jusqu'à l'état de liquide saturé (état 3 - situé sur la branche liquide de la courbe de saturation), en cédant la chaleur latente de condensation à l'agent de refroidissement qui coule dans les tubes du condenseur

3 - 4: <u>compression isentropique</u> de l'eau dans la pompe *P*: la pression de l'eau est augmentée jusqu'à la valeur p_1. La température de l'eau croît très peu (à titre d'exemple, en comprimant l'eau de 0,03 bar jusqu'à 300 bar, c'est à dire 10.000 fois, la température de celle-ci augmente avec 1^oC!). C'est pourquoi les points 3 et 4 se confondent pratiquement dans le diagramme T - s dans un point unique, noté 3,4.

4 - 5: <u>échauffement isobare</u> de l'eau dans la chaudière *C*: l'eau est amenée à la température de saturation T_{s_1} (correspondant à la pression p_1).

5 - 1: vaporisation isobare-isotherme de l'eau dans la chaudière *C*: l'eau est vaporisée, en résultant de la vapeur saturante sèche (titre en vapeur $x = 1$)

Le rendement du cycle est modeste, du fait que la température T_{S_1} est limitée (on peut augmenter T_{S_1} en augmentant la pression, mais ceci provoque une augmentation des sollicitations mécaniques).

La solution est d'augmenter la température supérieure du cycle, en surchauffant la vapeur sans croître la pression p_1. Le cycle résultant est le cycle avec surchauffe (cycle de Hirn).

B. *Cycle avec surchauffe (de Hirn[1])*

La structure de l'installation est schématisée sur la Fig. 6.14. Les diagrammes du cycle sont présentés sur la Fig. 6.15. Les transformations du cycle sont:

1 - 2: détente isentropique dans la turbine *T*

2 - 3: condensation isobare-isotherme dans le condenseur *K*

3 - 4: compression isentropique de l'eau dans la pompe *P*

4 - 5: échauffement isobare de l'eau dans la chaudière *C*

5 - 6: vaporisation isobare-isotherme de l'eau dans la chaudière *C*

6 - 1: échauffement isobare de la vapeur saturante sèche dans le **surchauffeur** *S*

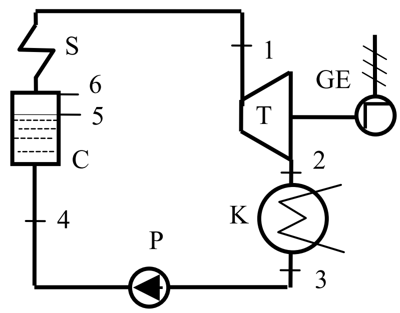


Fig. 6.14.

Rendement du cycle

La chaleur isobare reçue par 1 kg d'agent thermique dans la chaudière:

$$q_1 = q_{45} + q_{56} + q_{61} = (h_5 - h_4) + (h_6 - h_5) + (h_1 - h_6) = h_1 - h_4 \qquad (6.16)$$

La chaleur isobare cédée par 1 kg d'agent thermique dans le condenseur:

$$|q_2| = h_2 - h_3 \qquad (6.17)$$

Le rendement:

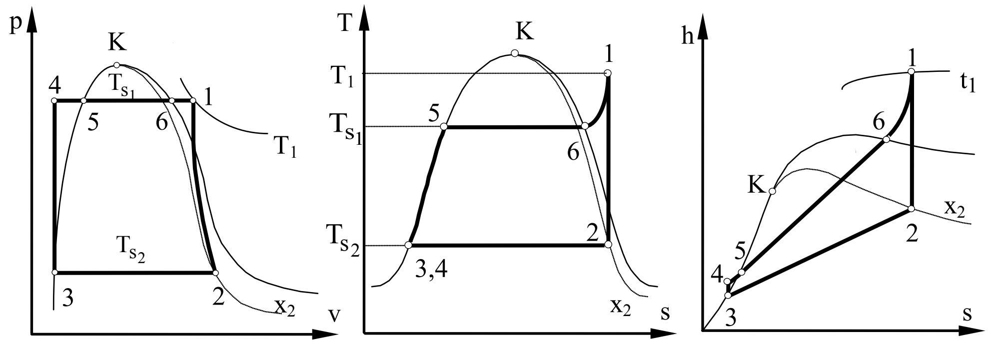
$$\eta = \frac{q_1 - |q_2|}{q_1} = \frac{(h_1 - h_4) - (h_2 - h_3)}{h_1 - h_4} = \frac{h_1 - h_2 - (h_4 - h_3)}{h_1 - h_4} \qquad (6.18)$$

Dans (6.18), compte tenu du premier principe appliqué aux transformations isentropiques ($w_t = -\Delta h = h_{initial} - h_{final}$), la différence $h_1 - h_2$ signifie *le travail technique* w_T *produit dans la turbine* et la différence $h_4 - h_3$ signifie *le travail technique* $|w_P|$

---

[1] **Hirn G.A.** (1815-1890): physicien français qui mesura l'équivalent mécanique de la calorie et construisit des machines à vapeur

dépensé dans la pompe. Le numérateur de (6.18) signifie donc *le travail cyclique*: $w_c = w_T - |w_P|$.



a) b) c)

Fig. 6.15.

Puisque $h_4 \approx h_3 \Rightarrow h_4 - h_3 \approx 0$, c'est à dire qu'on peut négliger le travail de compression w_P et par conséquent:

$$\boxed{\eta = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_3}} \qquad (6.19)$$

Afin d'améliorer le rendement il faut:

- augmenter la température moyenne à la source chaude. Ceci se réalise en augmentant soit la température de saturation T_{s_1} par l'augmentation de la pression p_1 , soit en augmentant la température de surchauffe T_1. Les deux méthodes sont limitées par les sollicitations mécaniques.
- abaisser la température moyenne à la source froide T_{s_2}. Cependant, cette diminution est limitée par les conditions de refroidissement: pour réaliser un refroidissement efficace, T_{s_2} doit être supérieure à la température de l'eau de refroidissement, qui est à son tour limitée par la température du milieu ambiant.

Après l'épuisement des resources d'amélioration précitées, on peut agir dans le même but en suivant deux autres voies:

- la resurchauffe: on détend la vapeur dans le corps haute pression de la turbine, ensuite on la resurchauffe et on la détend dans le corps basse pression.
- la réchauffe: on prélève de la vapeur de la turbine que l'on utilise pour réchauffer l'eau avant d'entrer dans la chaudière.

6.3.5. Cycles des réfrigérateurs à compresseur

Les réfrigérateurs sont des machines thermiques dont le cycle thermodynamique de fonctionnement est un cycle récepteur. Une machine frigorifique refroidit une

enceinte en transmettant la chaleur extraite au milieu ambiant, dont la température est supérieure à la température de l'enceinte refroidie. Pour ceci, le réfrigérateur reçoit de l'énergie mécanique provenant du milieu extérieur.

La structure d'un réfrigérateur dont le cycle de fonctionnement est le cycle de Carnot inversé est présentée sur la Fig. 6.16. Le cycle est schématisé sur la Fig. 6.17.

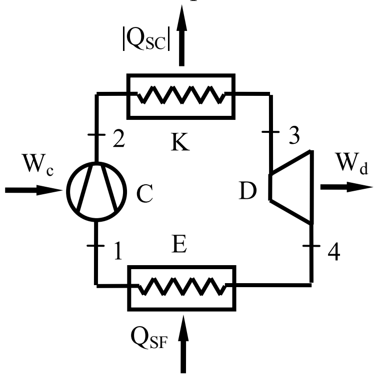


Fig. 6.16.

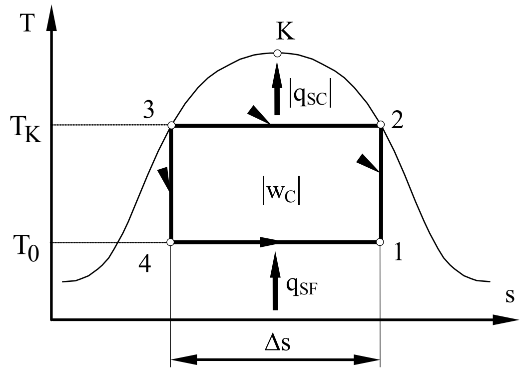


Fig. 6.17.

Les éléments de la machine frigorifique sont:

C - compresseur
K - condenseur
D - détendeur
E - évaporateur

Les transformations qui composent le cycle:

1 - 2: compression isentropique de la vapeur dans le compresseur *C*: la vapeur saturante humide de l'agent thermique est comprimée jusqu'à la pression p_k.

2 - 3: condensation isobare dans le condenseur *K*: la vapeur se condense à la température constante T_k, en cédant la chaleur q_{SC}

3 - 4: détente isentropique dans le détendeur *D*: le fluide frigorigène se détend jusqu'à la pression p_0, en fournissant du travail

4 - 1: vaporisation isobare dans l'évaporateur *E*: le fluide passe de l'état liquide à l'état gazeux en recevant de la source froide la quantité de chaleur q_{SF}

Efficacité frigorifique(ε_f):

$$\varepsilon_f = \frac{q_{SF}}{|w_c|} \tag{6.20}$$

où le travail cyclique w_c résulte de l'équation de bilan du cycle:

$$|w_c| = |q_{SC}| - q_{SF} = T_k\Delta s - T_0\Delta s = (T_k - T_0)\Delta s \tag{6.21}$$

Par conséquent:

$$\varepsilon_f = \frac{T_0}{T_k - T_0} = \frac{1}{\frac{T_k}{T_0} - 1} \quad (6.22)$$

On constate que plus la différence T_k - T_0 est faible, plus l'efficacité ε_f est grande.

Le cycle idéal (de Carnot) nécessite un détendeur, qui est une machine compliquée et prétentieuse dont la présence n'est pas justifiée (le travail fourni par le détendeur est très faible par rapport à celui exigé par le compresseur). En remplaçant le détendeur par un tube capillaire (*TC*) dans lequel le fluide frigorigène se détend à enthalpie constante, on obtient le schéma de Fig. 6.18. et le cycle de Fig. 6.19.

1 - 2: compression isentropique
2 - 3: condensation isobare
3 - 4: détente isenthalpique
4 - 5: vaporisation isobare

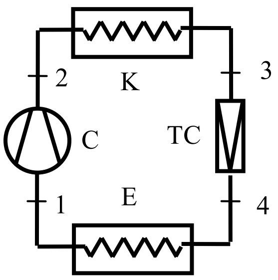


Fig. 6.18.

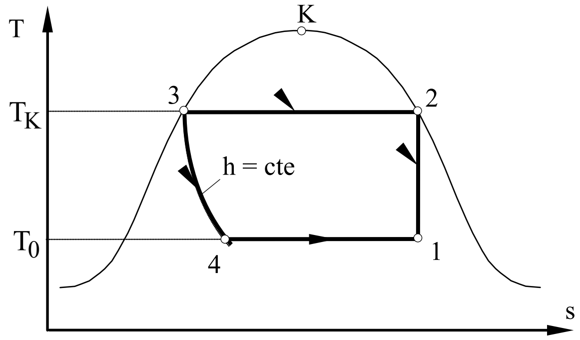


Fig. 6.19.

Efficacité frigorifique:

$$q_{SF} = h_1 - h_4$$
$$|w_c| = h_2 - h_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_f = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}} \quad (6.23)$$

QUESTIONS

1. Expliquez le mécanisme par l'intermédiaire duquel les forces intermoléculaires contribuent à l'augmentation de la pression du gaz réel.

2. La règle de Maxwell impose que les aires comprises entre le palier de liquéfaction et les deux boucles de la représentation de l'équation de Van der Waals dans le domaine biphasé soient égales. Justifiez cette affirmation en considérant que le palier de liquéfaction et les deux boucles constituent un cycle thermodynamique.

3. Une particule atomique produit l'ionisation du milieu liquide qu'elle traverse. Les ions sont de très bons centres de vaporisation autour desquels se forment les premières bulles de vapeur. C'est pourquoi les états métastables du liquide décrits par l'équation de Van der Waals sont utilisés dans la technique nucléaire dans les chambres à bulles. Expliquez le phénomène qui se produit quand le liquide surchauffé est traversé par une particule atomique.

4. En échauffant à volume constant la vapeur saturante humide dont le titre en vapeur est inférieur à 0,5, on obtient finalement du liquide saturé. Expliquez ce phénomène (apparemment en contradiction avec le bon sens) en utilisant le diagramme T - s de la vapeur.

5. La détente adiabatique du liquide saturé conduit à l'apparition de la vapeur saturante humide. Expliquez en utilisant le diagramme T - s de la vapeur.

6. A quelle température se vaporise l'eau sous une pression de 300 bar?

7. Expliquez pourquoi les aires des sections d'écoulement de la vapeur dans les étages finals des turbines à vapeur doivent être très grandes par rapport aux aires correspondantes des premiers étages.

8. Le rendement global d'une centrale électro-thermique peut égaler (théoriquement) l'unité. Ceci ne contredit pas le fait que le rendement thermique ne peut en aucun cas (même théoriquement) égaler l'unité? Expliquez ceci en tenant compte que la centrale électro-thermique produit en même temps de l'énergie et de la chaleur utile.

9. Pourquoi est-il raisonnable de remplacer le détendeur d'une machine frigorifique par un tube capillaire?

7. L'AIR HUMIDE

L'air humide est très utilisé dans des nombreux processus industriels caractérisés par des échanges de chaleur combinés avec échange de masse (humidité), par exemple dans les installations de climatisation, de ventilation, de séchage etc.

7.1. Propriétés physiques

7.1.1. Composition de l'air humide

L'air sec est un mélange gazeux dont les constituants sont N_2, O_2, Ar, CO_2, Ne, He, Kr, H_2, Xe, O_3, Rn. L'azote et l'oxygène représentent 99,04 % dans 1 m^3 d'air sec (78,09 % N_2 et 20,59 % O_2). On peut supposer donc que l'air sec est composé seulement d'azote (79 %) et d'oxygène (21 %), en négligeant les autres constituants.

L'air atmosphérique contient presque toujours de la vapeur d'eau en proportions variables, constituant **l'air humide**.

7.1.2. Pression

La pression atmosphérique (ou barométrique) *p* est, selon la loi de Dalton, la somme des pressions partielles des constituants (air sec et vapeur d'eau):

$$p = p_a + p_v \ [N / m^3] \qquad (7.1)$$

p_a - pression partielle de l'air sec

p_v - pression partielle de la vapeur d'eau

On appelle **pression partielle** d'un constituant du mélange, **la pression qu'il aurait s'il était le seul gaz à occuper le volume total à la température du mélange**.

Pour une valeur fixée de la température, il existe un état dit **de saturation**, caractérisé par la valeur maximale de la pression partielle de la vapeur: **pression de saturation** (p_s). Dans cet état le contenu en vapeur de l'air est maximal. Notons que la pression de saturation dépend seulement de la température de l'air: plus celle-ci est élevée, plus la pression de saturation est grande. On ne peut pas dépasser le seuil de saturation: toute quantité supplémentaire d'eau ne peut exister dans l'air que sous forme liquide. Ainsi s'explique l'apparition du brouillard: en se refroidissant, l'air saturé en vapeur devient sursaturé; la pression de saturation diminue lorsque la température se réduit et l'humidité excédentaire se condense sous forme de gouttes fines formant le brouillard.

Dans les calculs techniques on considère l'air sec et la vapeur d'eau représentant l'humidité comme des gaz parfaits, dont les constantes caractéristiques sont: $R_a = 461,5$ J / kg K, respectivement $R_v = 287$ J / kg K.

7.1.3. Température

On définit trois températures de l'air humide:

1. **Température du thermomètre sec**: (*t*). C'est la température effective (réelle) de l'air humide, mesurée à l'aide d'un thermomètre dont le bulbe a été protégé contre le rayonnement thermique
2. **Température du thermomètre mouillé**: (*t'*). C'est la température mesurée à l'aide d'un thermomètre dont le bulbe a été enveloppé d'un tissu imprégné d'eau. Ce thermomètre indique généralement une température plus basse que la température réelle (indiquée par le thermomètre sec). Ceci s'explique par l'évaporation de l'eau du tissu. L'évaporation est un phénomène qui nécessite chaleur. Cette chaleur est extraite du bulbe thermométrique et par conséquent, le thermomètre indiquera une température diminuée. La différence t - t' est dite **différence psychrométrique** et est proportionnelle au dégré de sécheresse de l'air: lorsque l'air est pauvre en humidité, l'évaporation est intense et le refroidissement du bulbe thermométrique est aussi intense. A l'état de saturation, l'évaporation est absente et donc t = t' (la différence psychrométrique est nulle).
3. **Température de roseé**: (t_r). C'est la température d'apparition des premières gouttes d'eau de condensation lorsqu'on refroidit l'air humide.

A l'état de saturation, $t = t' = t_r$.

7.1.4. Humidité

Il existe plusieurs modalités de définition de l'humidité de l'air humide, dont on retient le taux d'humidité et l'humidité relative:

1. **Le taux d'humidité** (*x*) est la masse de vapeur contenue dans un kilogramme d'air sec:

$$\boxed{x = \frac{m_v}{m_a}} \quad \left[\frac{\text{kg vapeur}}{\text{kg d'air sec}}\right] \tag{7.2}$$

A la saturation, le taux d'humidité x_s atteint sa valeur maximale:

$$x = \frac{m_{vs}}{m_a} \quad \left[\frac{\text{kg vapeur saturante}}{\text{kg d'air sec}}\right] \tag{7.3}$$

2. **L'humidité relative** (φ) est le rapport de la pression partielle p_v de la vapeur à la pression de saturation p_s considérée à la même température:

$$\boxed{\varphi = \frac{p_v}{p_s} = \frac{m_v}{m_{vs}}} \tag{7.4}$$

On exprime le taux d'humidité x en fonction de l'humidité relative φ comme suit:

- on écrit les équations d'état pour l'air sec et la vapeur:

$$p_v V = m_v R_v T$$

$$p_a V = m_a R_a T$$

- on divise les deux égalités membre à membre:

$$\frac{p_v}{p_a} = \frac{m_v}{m_a}\frac{R_v}{R_a} = x\frac{R_v}{R_a} \Rightarrow x = \frac{R_a}{R_v}\frac{p_v}{p_a} = \frac{287}{461{,}5}\frac{p_v}{p_a} = 0{,}622\frac{p_v}{p_a}$$

- compte tenu que $p_a = p - p_v$ et que $p_v = \varphi\, p_s$, on trouve:

$$\boxed{x = 0{,}622\frac{p_v}{p_a} = 0{,}622\frac{p_v}{p - p_v} = 0{,}622\frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}} \qquad (7.5)$$

A la saturation ($\varphi = 1$):

$$x_s = 0{,}622\frac{p_s}{p - p_s} \qquad (7.6)$$

7.1.5. Capacité calorifique

Pratiquement, toutes les transformations subies par l'air humide sont isobares et par conséquent on considérera seulement la capacité calorifique à pression constante.

En tenant compte que la masse de vapeur est variable, il est raisonnable de considérer la capacité calorifique par rapport à une quantité fixe. Cette quantité est la masse d'air sec. Dans le domaine usuel de températures, les valeurs moyennes des capacités calorifiques à pression constante des constituants de l'air humide sont:

- pour l'air sec: $c_{p_a} = 1{,}006\ \frac{kJ}{kg\ K}$
- pour la vapeur: $c_{p_v} = 1{,}863\ \frac{kJ}{kg\ K}$

Par conséquent, la capacité calorifique de l'air humide est:

$$\boxed{c_p = \frac{1\text{ kg air sec } \cdot c_{p_a} + x\text{ kg vapeur} \cdot c_{p_v}}{1\text{ kg air sec}} = c_{p_a} + x c_{p_v} = 1{,}006 + 1{,}863x} \qquad (7.7)$$

7.1.6. Enthalpie

L'enthalpie de l'air sec est:

$$h_a = c_{p_a} t = 1{,}006t \qquad (7.8)$$

L'enthalpie de la vapeur est:

$$h_v = r + c_{p_v} t = 2500 + 1{,}863t \qquad (7.9)$$

où r = 2500 kJ / kg est **la chaleur latente de vaporisation de l'eau**. Dans la relation de l'enthalpie de la vapeur, on a implicitement introduit la valeur conventionnelle h = 0 à 0^oC.

L'enthalpie de l'air humide sera calculée avec les relations:

$$h = \frac{1 \text{ kg air sec } \cdot h_a + x \text{ kg vapeur} \cdot h_v}{1 \text{ kg air sec}} = h_a + xh_v = c_{p_a} t + x\left(t + c_{p_v} t\right) = \\ = 1{,}006t + x\left(2500 + 1{,}863t\right) = 1{,}006t + 2500x + 1{,}863xt = c_p t + rx \qquad (7.10)$$

7.2. Diagramme de Mollier pour l'air humide

Ce diagramme (dit aussi **diagramme h - x**) est un outil très efficace dans les calculs impliquant les paramètres et les grandeurs physiques de l'air humide, ainsi que dans l'analyse des transformations subies par celui-ci. Le diagramme, représenté sur la Fig. 7.1., comporte trois réseaux de courbes:

– **courbes d'humidité relative constante (φ = cte)**. La courbe de saturation φ = 1 divise le domaine du diagramme en deux sous-domaines:

❍ région de l'air non-saturé, située au-dessus de la courbe de satu-ration

❍ région de l'air sursaturé, située au-dessous de la courbe de satu-ration

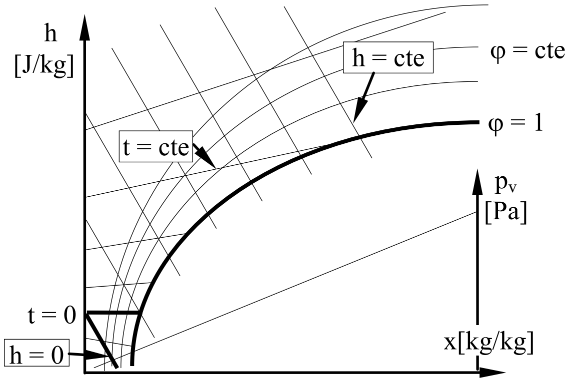


Fig. 7.1.

– **isothermes (t = cte)**. La seule isotherme horizontale est t = 0. Les autres sont des droites inclinées dont la pente est proportionnelle à la température.

– **isenthalpiques (h = cte)**. Ce sont des droites parallèles, inclinées sous le même angle.

En bas du diagramme on a tracé une droite inclinée, dite **droite des pressions partielles**, avec laquelle on détermine la pression partielle de la vapeur d'eau contenue dans l'air humide.

Comment utiliser le diagramme (schématisation sur la Fig. 7.2.):

Supposons qu'on a mesuré la température t_A et l'humidité relative φ_A de l'air humide (on mesure l'humidité relative à l'aide d'un appareil appelé **hygromètre**).

🗎 Le point ***A*** correspondant à l'état de l'air est obtenu sur le diagramme à l'intersection de l'isotherme t_A = cte et de la courbe φ_A = cte. On lit sur le diagramme l'enthalpie h_A, le taux d'humidité x_A et la pression partielle de la vapeur p_{v_A} .

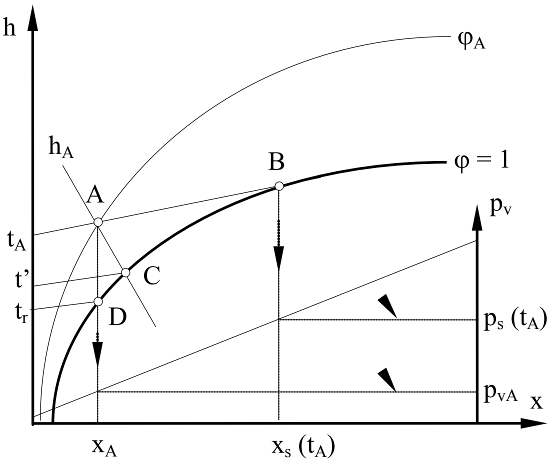


Fig. 7.2.

🗎 On trouve *la température du thermomètre mouillé* t' dans le point ***C*** d'intersection de l'isenthalpique h_A = cte avec la courbe de saturation $\varphi = 1$ (le processus A - C correspond à un processus d'humidification adiabatique de l'air non-saturé).

🗎 On détermine *la température du point de rosée* t_r correspondant à l'état ***A*** de l'air humide, dans le point ***D*** d'intersection de la courbe $\varphi = 1$ avec la droite x_A = cte (A - D: processus de refroidissement à taux d'humidité constant).

🗎 On trouve le point ***B*** correspondant à *l'état de saturation de l'air à la température* t_A en prolongeant l'isotherme t_A jusqu'à l'intersection avec la courbe de saturation. Dans cet état, l'air est saturé en vapeur (l'humidité relative est maximale: $\varphi_B = 1$). On lit le taux d'humidité de saturation $x_s(t_A)$ et la pression $p_s(t_A)$ de saturation de la vapeur à la température t_A.

Représentation des transformations

On représente une transformation entre l'état initial *1* et l'état final *2*, par une ligne droite reliant les points correspondants (voir Fig. 7.3.). Le rapport:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta h}{\Delta x}} \qquad (7.11)$$

dit **taux de thermo-humidité** représente la pente de la transformation 1 - 2 par rapport à la direction des isenthalpiques.

Le taux de thermo-humidité est un paramètre très important des processus subis par l'air humide.

Pour une détermination rapide du taux de thermo-humidité, le diagramme est muni sur le périmètre d'une échelle angulaire. Afin de trouver la valeur du taux de thermo-humidité correspondant à la transformation 1 - 2, on trace dans le pôle *O* une parallèle à la droite de la transformation et on lit sur l'échelle angulaire la valeur ε_{12}.

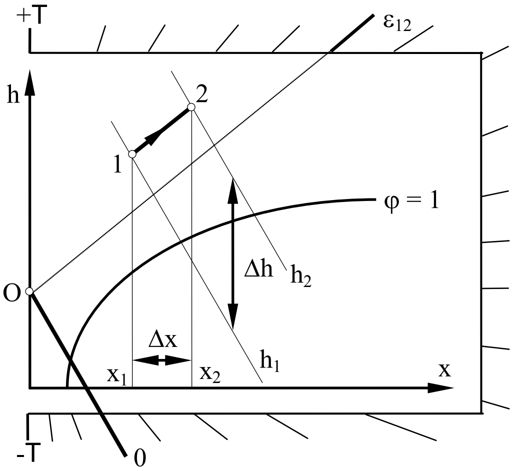


Fig. 7.3.

7.3. Transformations particulières de l'air humide

7.3.1. Transformation à taux d'humidité constant

L'air humide subit une transformation à taux d'humidité constant, lorsqu'il entre en contact avec une surface chaude (échauffement à x = cte) respectivement avec une surface froide, dont la température est supérieure à la température de rosée (refroidissement à x = cte). Puisque le taux d'humidité est constant, seul l'échange de chaleur est présent au cours de la transformation. L'humidité relative augmente lorsqu'on échauffe l'air et diminue en cas d'un refroidissement. On représente une transformation à taux d'humidité constant par une droite verticale (voir Fig. 7.4.):

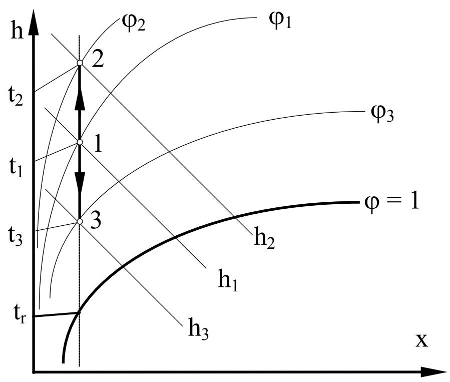


Fig. 7.4.

1 - 2: échauffement D ε = + T

1 - 3: refroidissement D ε = - T

Dans le cas du refroidissement, la température de la surface froide doit être supérieure à la température de rosée puisque dans la situation contraire, une partie de la vapeur contenue dans l'air se condense sur cette surface, le taux d'humidité diminue et par conséquent la condition x = cte n'est plus vérifiée.

La chaleur échangée durant la transformation, compte tenu que le processus se déroule à p = cte, représente la variation de l'enthalpie de l'air humide:

$$q_{12} = h_2 - h_1 = (1{,}006 + 1{,}863x)(t_2 - t_1) > 0 \qquad (7.12)$$

$$q_{13} = h_3 - h_1 = (1{,}006 + 1{,}863x)(t_3 - t_1) < 0 \qquad (7.13)$$

7.3.2. Transformation isotherme

Lorsqu'on injecte dans l'air humide de la vapeur d'eau, on obtient une transformation isotherme, caractérisée par l'échange combiné de chaleur et d'humidité. Le taux d'humidité et l'humidité relative augmentent: l'air s'humidifie à température constante (voir Fig. 7.5.). Si la quantité de vapeur injectée est suffisante, l'air peut devenir saturé (φ = 1). On peut réaliser une transformation inverse par rapport à la transformation décrite ci-dessus, en mettant l'air en contact avec une substance **adsorbante**, c'est à dire une substance qui retient la vapeur. En ce cas, le taux d'humidité et l'humidité relative diminuent: l'air sèche à température constante.

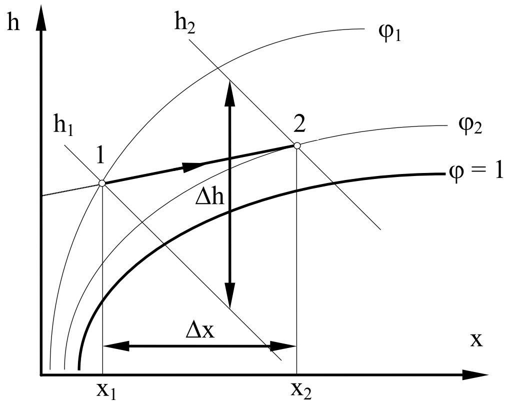


Fig. 7.5.

La quantité de chaleur échangée au cours de la transformation isotherme 1 - 2 se calcule avec la relation:

$$q_{12} = h_2 - h_1 = (2500 + 1{,}863t)(x_2 - x_1) > 0 \qquad (7.14)$$

Par conséquent, le taux de thermo-humidité caractérisant une transformation isotherme est:

$$\varepsilon = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = 2500 + 1{,}863t = h_v \qquad (7.15)$$

c'est à dire que le taux de thermo-humidité est égal à l'enthalpie de la vapeur.

7.3.3. Transformation à enthalpie constante

Cette transformation est dite **humidification adiabatique** puisque l'air non-saturé mis en contact avec de l'eau, absorbe la vapeur produite par l'évaporation de celle-ci, en fournissant lui-même la chaleur latente de vaporisation nécessaire. Par conséquent, l'échange de chaleur qui se déroule entre l'air et l'eau est un échange interne: la chaleur cédée par l'air pour l'évaporation de l'eau, se retrouvera sous forme de chaleur latente de la vapeur absorbée. L'apport d'humidité vers l'air non-saturé est provoqué par la différence entre la pression de saturation p_s et la pression partielle p_v

de la vapeur contenue dans l'air. Cette différence engendre une diffusion de la vapeur depuis les régions riches en vapeur vers les régions caractérisées par des faibles concentrations (taux d'humidité). Par ce phénomène, l'air s'enrichit adiabatiquement en vapeur ($\delta q = 0$). Puisque le processus est en même temps isobare ($dp = 0$), compte tenu de l'expression différentielle du premier principe ($\delta q = dh - vdp$), on conclut que la transformation est **isenthalpique**, c'est à dire que l'enthalpie reste constante au cours d'une humidification adiabatique (voir Fig. 7.6.).

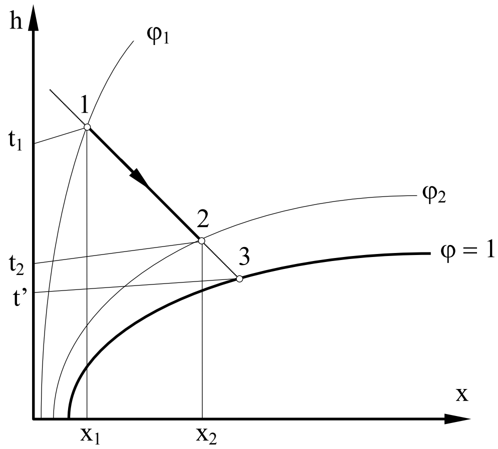


Fig. 7.6.

Lorsque la transformation se poursuit jusqu'à la saturation (point *3*), la température de l'air devient égale à la température du thermomètre mouillé *t'*.

La condition $h_1 = h_2$ conduit à:

$$(1{,}006 + 1{,}863x_1)t_1 + 2500x_1 = (1{,}006 + 1{,}863x_2)t_2 + 2500x_2$$

et il résulte:

$$1{,}006(t_1 - t_2) + 1{,}863(t_1x_1 - t_2x_2) = 2500(x_2 - x_1) \tag{7.16}$$

La dernière relation met en évidence l'échange interne de chaleur qui se déroule lorsque l'air s'enrichit en vapeur par voie adiabatique: la chaleur latente nécessaire pour l'évaporation de la quantité $x_2 - x_1$ de vapeur est fournie par l'air lui-même, qui se refroidit de t_1 à t_2.

7.3.4. Mélange de deux quantités d'air humide

Considérons dex quantités m_1 et m_2 d'air humide dont les paramètres sont x_1 et h_1 respectivement x_2 et h_2. Les deux quantités se mélangent, en résultant une quantité $m_M = m_1 + m_2$ dont les paramètres qu'il faut déterminer sont x_M et h_M.

Dans ce but, on considère les équations de bilan:

- de chaleur :

$$m_1h_1 + m_2h_2 = (m_1 + m_2)h_M \tag{7.17}$$

- d'humidité:

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)x_M \tag{7.18}$$

et on les écrit dans les formes équivalentes:

$$m_2(h_2 - h_M) = m_1(h_M - h_1) \tag{7.19}$$

$$m_2(x_2 - x_M) = m_1(x_M - x_1) \tag{7.20}$$

En divisant les deux équations membre à membre, on obtient:

$$\frac{h_2 - h_M}{x_2 - x_M} = \frac{h_M - h_1}{x_M - x_1} \qquad (7.21)$$

c'est à dire:

$$\varepsilon_{M-2} = \varepsilon_{1-M} \qquad (7.22)$$

La relation prédédente signifie que les directions des processus 1 - M et 2 - M sont égales et par conséquent, le point d'état *M* du mélange se situe dans le diagramme de Mollier sur la ligne droite qui relie les états correspondant aux dex quantités initiales d'air (Fig. 7.7.).

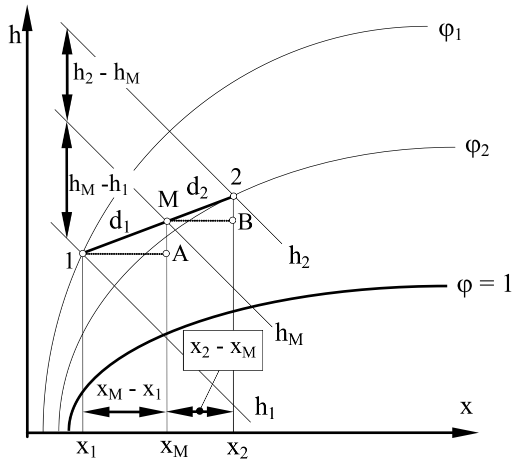


Fig. 7.7.

On désigne par *n* (**taux de mélange**) le rapport m_1 / m_2. On récrit les équations (7.17) et (7.18) dans les formes suivantes:

$$nh_1 + h_2 = (n+1)h_M \qquad (7.23)$$

$$nx_1 + x_2 = (n+1)x_M \qquad (7.24)$$

et on trouve:

$$h_M = \frac{nh_1 + h_2}{n+1} \qquad (7.25)$$

$$x_M = \frac{nx_1 + x_2}{n+1} \qquad (7.26)$$

Les dernières relations permettent la détermination des paramètres du mélange par voie analytique.

Il existe aussi une méthode graphique: en désignant par d_1 et d_2 les distances 1 - M respectivement M - 2, compte tenu que les triangles 1AM et 2MB sont semblables, on trouve:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{M1}}{\overline{M2}} = \frac{\overline{1A}}{\overline{MB}} = \frac{x_M - x_1}{x_2 - x_M}$$

La relation (7.20) donne: $\frac{x_M - x_1}{x_2 - x_M} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{n}$ et par conséquent on obtient:

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{n}} \qquad (7.27)$$

En conclusion, la position du point *M* sur la droite 1 - 2 est telle que le rapport dans lequel celui-ci divise la droite est inversement proportionnel au taux de mélange.

QUESTIONS

1. Comment définit-on la pression partielle d'un constituant d'un mélange gazeux?

2. Que signifie le fait que l'humidité relative égale 100%?

3. Expliquez le mécanisme des phénomènes météorologiques de rosée et brouillard.

4. Quelle est l'explication de l'apparition des nuages?

5. Dans le hangars très hauts (environ 150 m) pour l'assemblage des fusées Saturn V à Cape Canaveral, un problème non prévu par les constructeurs était l'apparition des nuages à la partie supérieure. Quelle solution proposeriez vous pour résoudre ce problème?

6. Pour initier le processus de condensation de l'humidité atmosphérique en excès, il est nécessaire d'exister dans l'air des très petits corps en suspension (poussière, pollen, aérosols divers). D'autre part, les ions constituent des très bons centres de condensation. Imaginez le principe de fonctionnement d'une chambre à brouillard, utilisée dans la technique nucléaire (voir aussi question numéro 3, Chapitre 6).

7. Expliquez le mécanisme d'apparition des traînées de condensation produites par les avions qui volent à haute altitude.

8. Pourquoi en hiver le linge sèche-t-il très difficilement?

9. Pourquoi les montagnes situées dans la région littorale d'une mer ou d'un océan sont-elles presque toujours couvertes de nuages quand la brise souffle vers la terre ferme?

TRANSFERT DE CHALEUR

8. NOTIONS FONDAMENTALES

Définition:

Le transfert de chaleur étudie les processus spontanés irréversibles de propagation de l'énergie thermique dans un corps ou entre corps différents.

Basée sur les principes de la thermodynamique, cette science s'est ultérieurement développée indépendamment de la thermodynamique. Lorsque celle-ci s'intérresse seulement à la quantité de chaleur échangée entre le système et le milieu extérieur, le transfert de chaleur aborde ce problème en considérant une nouvelle notion, celle de vitesse de transfert thermique qui tient compte de la dépendance de temps de ce phénomène. Le passage de l'énergie thermique (usuellement appelé "chaleur") se produit lorsqu'entre deux points il existe une différence de température. En conséquence, il faut une différence de potentiel thermique pour avoir un transfert de chaleur. Ce processus ne peut être arrêté; on peut tout au plus le ralentir. En conséquence, la condition d'isolement adiabatique ne peut être obtenue que théoriquement; donc, le transfert de chaleur est un processus irréversible.

Les problèmes principaux qui doivent être résolus par cette science sont:

♦ la détermination de la quantité de chaleur échangée par les différents systèmes analysés
♦ la vérification de la compatibilité des matériaux utilisés dans la technique avec le régime thermique imposé
♦ l'intensification ou le ralentissement de l'échange de chaleur. L'intensification du transfert de chaleur conduit à la diminution de l'encombrement d'un outillage, donc une économie de matériau. Le résultat du ralentissement du transfert thermique (par l'isolement thermique d'une conduite, d'une paroi, etc.) est une économie de combustible.

♦ la réalisation d'un transfert thermique maximal par unité de surface, dans des conditions optimales du point de vue économique
♦ l'optimisation des élements constructifs du point de vue des pertes de chaleur ou des apports thermiques

8.1. Modes de transfert thermique

Les trois modes de transfer mis en jeu lorsqu'un système thermodynamique échange de l'énergie thermique avec le milieu extérieur sont: la conduction, la convection et le rayonnement.

8.1.1. Transfert de chaleur par conduction

Ce type de transfert est un processus de transport moléculaire (de proche en proche) de l'énergie thermique à l'intérieur d'un corps matériel, qui se fait sans transport de matière et est provoqué par un gradient de température. Le mécanisme de transfert thermique conductif est représenté par la transmission de proche en proche de l'énergie d'agitation thermique par l'intermédiaire des forces intermoléculaires. Ce mode de transfert est caractéristique pour l'état solide, bien que les liquides et les gaz conduisent aussi la chaleur, mais très faiblement.

8.1.2. Transfert de chaleur par convection

C'est un processus complexe, caractérisé par un échange conductif accompagné d'un transfert de masse. Le transfert de masse représente la migration de la substance sous l'action d'une différence de concentration ou par suite d'une action extérieure.

Le transfert de masse sous l'action d'une différence de concentration caractérise la convection dite **naturelle**. En ce cas, la densité joue le rôle de la concentration: lorsqu'on échauffe un fluide, la densité des couches qui sont en contact direct avec la surface chaude diminue; celles-ci deviennent plus légères que les autres zones du fluide, restées froides. Par conséquent, les masses chaudes se lèvent en faisant place aux masses plus froides. Le mouvement du fluide se réalise ainsi sous l'action de la différence de densité[1]. Le sens de circulation s'inverse lorsqu'on refroidit un fluide chaud. Lorsque le mouvement du fluide est provoqué par une cause extérieure, la convection est dite **forcée**. Par exemple, lorsqu'un ventilateur souffle un courant d'air sur une surface chaude, l'air s'échauffe par convection forcée.

En conclusion, la convection est un mode de transfert rencontré seulement dans le cas des fluides (liquides ou gaz) et est indissolublement lié au mouvement du milieu

[1] Puisque l'action de la force de la pesanteur en est indispensable, il résulte que la convection naturelle est impossible dans l'état d'impondérabilité.

de transfert thermique.

8.1.3. Transfert de chaleur par rayonnement

Ce mode de transfert représente la propagation de l'énergie thermique par l'intermédiaire des ondes électromagnétiques. Cette propagation s'effectue sans support matériel et sans transport de matière. Tout corps matériel émet et reçoit un rayonnement. Une partie de l'énergie interne du corps est convertie (par l'intermédiaire des mécanismes quantiques d'excitation-désexcitation) en énergie électromagnétique qui se propage sous forme de photons (l'aspect corpusculaire du rayonnement). Lorsque le rayonnement émis par le corps considéré rencontre un autre corps, une partie de son énergie est réconvertie en énergie interne, déterminant l'augmentation de la température du corps récepteur.

Généralement, tous les trois modes de transfert sont présents dans un processus d'échange de chaleur. D'habitude, on peut négliger le mode dont l'influence est moins importante. On analyse donc les combinaisons conduction-convection, conduction-rayonnement ou convection-rayonnement, dites **processus complexes de transfert thermique**.

8.2. Grandeurs caractéristiques

Le transfert de chaleur utilise quelques notions spécifiques qui désignent les grandeurs particulières avec lesquelles celui-ci opère. Ces notions sont:

8.2.1. Champ de température

Soit M(x, y, z) un point quelconque dans un corps. La température est un paramètre scalaire d'état, dépendant de la position du point considéré et du temps τ:

$$t = f_1(x, y, z, \tau) \qquad (8.1)$$

L'expression (8.1) définit le champ de température. Celui-ci représente **la totalité des valeurs de la température dans le domaine spatial considéré**.

Le champ de température est dit **stationnaire** (**permanent** ou **constant**), lorsque la température ne dépend pas du temps:

$$t = f_2(x, y, z); \qquad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \qquad (8.2)$$

Lorsque la température dépend du temps, le champ de température est dit **instationnaire** (**variable** ou **transitoire**). La relation (8.1). définit un **champ de température instationnaire tridimensionnel**.

Cas particuliers:

- **champ bidimensionnel**:

$$t = f_3(x, y, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \tag{8.3}$$

- **champ unidimensionnel**:

$$t = f_4(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \tag{8.4}$$

Le plus simple champ de température est **le champ de température unidimensionnel stationnaire**:

$$t = f_5(x); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \tag{8.5}$$

8.2.2. Surface isotherme

Une surface telle que tous les points qui lui appartiennent ont la même température au même instant est dite **surface isotherme**. Puisqu'un point ne peut pas avoir simultanément deux températures différentes, il en résulte que les surfaces isothermes ne s'entrecroisent pas.

8.2.3. Gradient de température

Le gradient de température en un point quelconque représente la variation infinitésimale de la température dans la direction de la normale à la surface isotherme dans le point considéré.

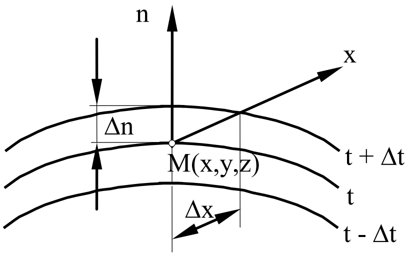


Fig. 8.1.

Le résultat de l'intersection d'une famille de surfaces isothermes avec un plan est une famille de courbes, dites **courbes isothermes** (voir Fig. 8.1.).

Considérons les courbes isothermes *t* et *t* + Δ*t*. Le taux de variation de la température par unité de longueur Δt / Δx devient maximal lorsque la direction suivant laquelle on mesure la distance est normale à la courbe.

On définit donc le gradient de température en un point M(x, y, z) comme la limite du rapport Δt / Δn lorsque Δn D 0:

$$\boxed{\text{grad}\, t = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n}} \quad \left[\frac{^{o}C}{m}\right] \tag{8.6}$$

Le gradient de température est un vecteur (dont l'origine est le point considéré) orienté dans le sens de la normale:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, t = \vec{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n} \tag{8.7}$$

($\vec{n}_0$ désigne le verseur de la normale).

En décomposant le vecteur gradient suivant les directions des axes d'un répère orthonormal, on obtient:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, t = \frac{\partial t}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\vec{k} \tag{8.8}$$

($\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial z}$ sont les composantes du vecteur).

8.2.4. Flux thermique

Le flux thermique $\dot{Q}$ représente la chaleur traversant une surface isotherme *S* pendant 1 seconde:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\tau} \quad [W] \tag{8.9}$$

8.2.5. Densité de flux thermique

La densité de flux q_s représente le flux thermique correspondant à une surface unitaire:

$$q_s = \frac{\dot{Q}}{S} = \frac{Q}{S\tau} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{8.10}$$

QUESTIONS

1. Décrivez le transfert de chaleur entre le Soleil et l'air atmosphérique.
2. Pourquoi mesure-t-on la température de l'air à l'ombre?
3. Pourquoi fait-on du vide entre les parois d'un récipient thermos et on les argente?

4. Quel est le mode de transfert thermique dans les cas suivants: a) radiateur d'un moteur à combustion interne; b) radiateur du chauffage central; c) radiateur électrique; d) radiateur d'un transistor?

5. Pourquoi la cheminée n'est-elle pas très efficace du point de vue de l'echauffement d'une pièce?

9. TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

Le transfert de chaleur par conduction se produit à travers un corps solide ou une couche immobile de fluide.

Dans le cas des corps solides métalliques, la conduction thermique est due principalement aux électrons libres constituant un gaz électronique qui “transporte” la chaleur. Puisque le nombre d’électrons libres est très grand, l’énergie thermique transférée est grande aussi: les métaux sont de bons conducteurs de chaleur.

Le mécanisme de transfert dans le cas des liquides est dû aux oscillations des molécules, dont l’amplitude est proportionnelle à la température. Toute variation d’amplitude des oscillations se propage à l’intérieur du liquide par l’intermédiaire des forces intermoléculaires.

Dans le cas des gaz, les distances moyennes séparant les molécules sont grandes et par conséquent, les forces intermoléculaires sont faibles: c’est pourquoi les gaz sont des mauvais conducteurs de chaleur.

9.1. Loi de Fourier

La loi de Fourier[1] représente la relation mathématique fondamentale qui décrit l’échange de chaleur conductif:

La quantité élémentaire de chaleur qui passe par la surface isotherme élémentaire d*S* pendant l’intervalle élémentaire de temps d*τ*, est proportionnelle au gradient de température.

$$\boxed{dQ = -\lambda dS \frac{\partial t}{\partial n} d\tau} \quad [J] \qquad (9.1)$$

ou:

$$\boxed{q_S = \frac{dQ}{dS d\tau} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad (9.2)$$

Dans les relations (9.1) et (9.2), λ désigne une propriété physique de la substance, dite **conductivité thermique**. La signification physique de la conductivité est définie en écrivant:

---

[1] **Fourier J.** (1768 - 1830): mathématicien français qui énonça le premier la loi mathémathique du transfert de chaleur par conduction. Il découvrit aussi les séries trigonométriques dites *séries de Fourier*.

$$\lambda = \frac{q_s}{\frac{\partial t}{\partial n}} \quad \left[\frac{W}{mK}\right] \tag{9.3}$$

En conséquence, λ représente **la densité de flux échangé sous un gradient de température unitaire**. La conductivité thermique dépend généralement de l'état d'agrégation, de la nature de la substance, de la température et de la pression. Le paramètre principal qui influence la conductivité est la température. Dans le cas des corps solides, bien que les relations polynomiales d'approximation de la variation de la conductivité offrent une meilleure précision, on préfère l'approximation linéaire: $\lambda = \lambda_0(1 \pm \beta t)$. La plupart des matériaux sont caractérisés par des valeurs positives du coefficient β (la conductivité augmente avec la température). Dans le cas des gaz, la variation de la conductivité est décrite par la relation: $\lambda = \lambda_0\left(\frac{T}{273}\right)^{3/2}$ où λ_0 désigne la conductivité à 0^oC.

Le signe "moins" dans l'expression mathématique de la loi de Fourier met en concordance la réalité physique et la formulation mathématique: *le sens de propagation de la chaleur est opposé au celui du vecteur gradient de température*. Par conséquent, le sens du vecteur densité de flux est opposé au sens du gradient thermique (voir Fig. 9.1.).

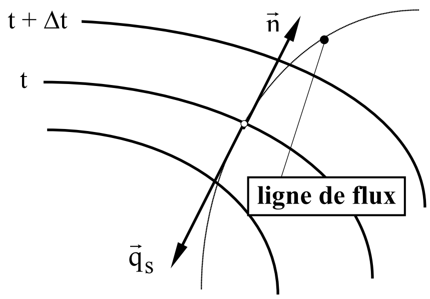


Fig. 9.1.

$$\vec{q}_s = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\vec{k}\right) = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,t \tag{9.4}$$

Le vecteur densité de flux est tangent aux courbes dites **lignes de flux** qui sont normales aux courbes isothermes.

9.2. Equation différentielle de la conduction

Le calcul des grandeurs caractérisant les processus de conduction thermique nécessite la connaissance de la distribution de la température à l'intérieur du corps considéré, c'est à dire du champ de température. On peut déterminer celui-ci en trouvant la solution d'une équation à dérivées partielles, dite **équation différentielle de la conduction**.

Pour déduire l'expression explicite de cette équation, on considère un volume élémentaire dV = dx dy dz défini dans l'intérieur du corps considéré, auquel on applique la loi de conservation de l'énergie. On écrit donc un bilan thermique selon lequel la somme des quantités de chaleur entrées égale la somme des quantités de chaleur qui sortent du volume élémentaire d*V*.

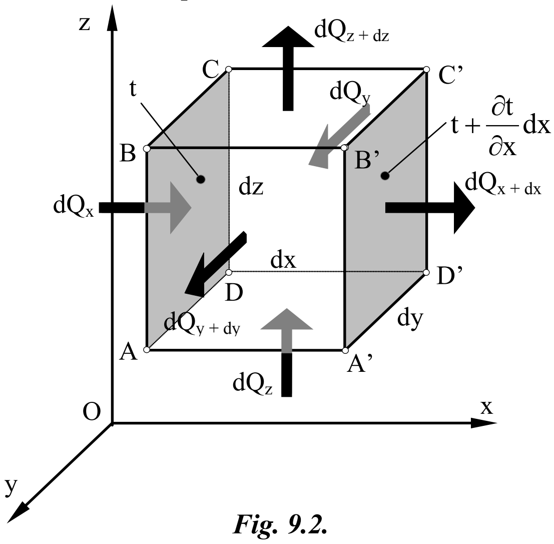


Fig. 9.2.

On impose les conditions suivantes:

- le corps est homogène et isotrope ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$).
- la capacité calorifique à pression constante c_p et la densité ρ ne dépendent pas de température
- dans le corps il existe des **sources internes de chaleur** uniformément distribuées, dont la présence se traduit par un engendrement interne de chaleur caractérisé par la **densité volumique de flux** (ou **flux volumique**) q_v [W / m^3], définie comme le flux thermique produit dans un volume unitaire.

Le volume élémentaire, schématisé sur la Fig. 9.2., est traversé par conduction par des quantités de chaleur suivant les directions des trois axes du répère orthonormal attaché. En même temps, les sources internes disséminées dans la substance du corps produisent une quantité de chaleur. Le résulat est constitué par l'énergie thermique accumulée dans le volume élémentaire d*V* dans l'intervalle de temps dτ:

$$dQ = dQ_{cond} + dQ_v \qquad (9.5)$$

où:

- **dQ** - la quantité de chaleur accumulée dans le volume élémentaire à cause du transfert conductif et de l'engendrement interne de chaleur
- **dQ_{cond}** - la quantité de chaleur emmagasinée par conduction dans le volume élémentaire d*V* pendant l'intervalle de temps dτ
- **dQ_v** - la quantité de chaleur produite durant le temps dτ par les sources internes présentes dans le volume élémentaire considéré

Calcul de dQ_{cond}

La quantité de chaleur dQ_{cond} a trois composantes correspondant aux trois directions de propagation *Ox*, *Oy* et *Oz*:

$$dQ_{cond} = dQ_{cond,x} + dQ_{cond,y} + dQ_{cond,z} \qquad (9.6)$$

Puisque le raisonnement est similaire, prenons à titre d'exemple *la propagation de la chaleur par conduction suivant la direction Ox*:

Le bilan thermique du transfert de chaleur conductif suivant cette direction affirme qu'une partie ($dQ_{cond,x}$) de la quantité de chaleur dQ_x qui entre dans le volume élémentaire pendant l'intervalle de temps $d\tau$, est accumulée dans la substance renfermée dans ce volume et le reste (dQ_{x+dx}) sort:

$$dQ_{cond,x} = dQ_x - dQ_{x+dx} \tag{9.7}$$

Selon la loi de Fourier, la quantité de chaleur dQ_x peut être calculée avec la relation:

$$dQ_x = -\lambda dS \frac{\partial t}{\partial x} d\tau = -\lambda dydz \frac{\partial t}{\partial x} d\tau \tag{9.8}$$

En désignant par t la température de la face ABCD du volume élémentaire dV et en supposant que la température est une fonction continue n fois dérivable, on peut écrire la température de la face opposée A'B'C'D' (située à la distance dx par raport à la face ABCD) comme un développement en série de Taylor:

$$t(x+dx) = t(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial t(x)}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 t(x)}{\partial x^2}(dx)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n t(x)}{\partial x^n}(dx)^n \tag{9.9}$$

En retenant seulement les premiers deux termes du développement on peut écrire:

$$t(x+dx) = t + \frac{\partial t}{\partial x}dx \tag{9.10}$$

Si l'on tient compte que la température donnée par (9.10) représente la température de la face par laquelle la quantité de chaleur dQ_{x+dx} sort du volume élémentaire, en appliquant la loi de Fourier, on peut écrire:

$$dQ_{x+dx} = -\lambda dS \frac{\partial t(x+dx)}{\partial x} d\tau = -\lambda dydz \frac{\partial}{\partial x}\left(t + \frac{\partial t}{\partial x}dx\right)d\tau = -\lambda dydz \frac{\partial t}{\partial x}d\tau - \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dxdydzd\tau$$

$$\Rightarrow dQ_{x+dx} = dQ_x - \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dVd\tau \tag{9.11}$$

Compte tenu de (9.10) et (911), le bilan (9.7) devient:

$$dQ_{cond,x} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dVd\tau \tag{9.12}$$

En vertu de la similarité, les composantes correspondant aux directions *Oy* et *Oz* ont pour expressions mathématiques:

$$dQ_{cond,y} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dVd\tau \tag{9.13}$$

$$dQ_{cond,z} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dV d\tau \tag{9.14}$$

Par conséquent, dQ_{cond} devient:

$$dQ_{cond} = dQ_{cond,x} + dQ_{cond,y} + dQ_{cond,z} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dV d\tau = \lambda\, \nabla^2 t \, dV d\tau \tag{9.15}$$

Dans la dernière relation, par ∇^2 on a désigné l'opérateur dit **laplacien**:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9.16}$$

Calcul de d*Q*$_v$

La quantité de chaleur produite durant l'intervalle de temps $d\tau$ par les sources internes est:

$$dQ_v = q_v dV d\tau \tag{9.17}$$

Calcul de d*Q*

En désignant par $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ **la vitesse de variation de la température** et par d*m* la masse renfermée dans le volume élémentaire, on peut écrire la quantité de chaleur accumulée d*Q* comme suit:

$$dQ = dm\, c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = \rho\, dV\, c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \tag{9.18}$$

En portant (9.15), (9.17) et (9.18) dans (9.9), après les réductions nécessaires, on obtient:

$$\rho\, c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 t + q_v \tag{9.19}$$

On divise la dernière équation par $\rho\, c_p$ et on trouve:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho\, c_p}} \tag{9.20}$$

L'équation (9.20) représente **l'équation différentielle de la conduction**.

Dans cette équation, $a = \lambda / \rho c_p$ [m^2/s] désigne **la diffusivité thermique**. Cette grandeur caractérise *l'inertie thermique de la substance*, c'est à dire la “vitesse de réponse” du matériau aux perturbations thermiques. Plus l'inertie thermique est grande, plus la vitesse de réponse est réduite. Une diffusivité élevée correspond à une faible inertie thermique.

Formes particulières de l'équation différentielle de la conduction

– équation de Poisson[1] : régime stationnaire ($\partial t / \partial \tau = 0$) avec sources internes:

$$\boxed{\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0} \qquad (9.22)$$

– équation de Fourier : régime instationnaire sans sources internes ($q_v = 0$):

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t} \qquad (9.23)$$

– équation de Laplace[2] : régime stationnaire ($\partial t / \partial \tau = 0$) sans sources internes ($q_v = 0$):

$$\boxed{\nabla^2 t = 0} \qquad (9.24)$$

9.2.1. Conditions d'univocité

L'équation différentielle de la conduction donne une description mathématique générale d'un phénomène de transfert de chaleur conductif. Pour appliquer cette équation à un cas particulier, il faut introduire des conditions supplémentaires, dites **conditions d'univocité** (**unicité**). L'ensemble équation différentielle de la conduction + conditions d'unicité constitue une description mathématique complète du phénomène de transfert de chaleur conductif étudié. Du point de vue mathématique, en imposant les conditions d'univocité, la solution générale de l'équation se transforme en solution particulière correspondant au cas considéré.

On classifie les conditions d'univocité en:

1. *Conditions géométriques*: La forme géométrique et les dimensions du corps étudié.

2. *Conditions physiques*: Les propriétés physiques du corps (λ, a, ρ, c_p etc.) et la distribution des sources internes de chaleur, ainsi que la valeur du flux volumique q_v produit par celles-ci.

3. *Conditions initiales*: La distribution de la température (le champ de température) à l'instant initial $\tau = 0$:

$$t = f(x, y, z, 0)$$

---

[1] **Poisson S. D.** (1781 - 1840): mathématicien et homme politique français, connu pour ses travaux de mécanique rationnelle et de physique mathématique.

[2] **Laplace P. S. de** (1749 - 1827): mathématicien, physicien et astronome, l'un des plus grands savants français. Auteur de travaux sur la théorie des probabilités et sur la mécanique céleste.

4. <u>*Conditions aux limites*</u>: La caractérisation des échanges thermiques au niveau de la surface du corps.

   On définit quatre types de conditions aux limites:

   I. Conditions aux limites de première espèce: On connaît à chauqe instant τ la distribution de température sur la surface du corps:

$$\boxed{t_s = f(x, y, z, \tau)} \quad (9.25)$$

   Le cas le plus simple est t_s = cte.

   II. Conditions aux limites de seconde espèce: On connaît à chaque instant la densité de flux sur la surface:

$$\boxed{q_{s_{surface}} = f(x, y, z, \tau)} \quad (9.26)$$

   III. Conditions aux limites de troisième espèce: On connaît la température du milieu ambiant et la loi de transfert thermique entre celui-ci et la surface du corps (loi de Newton). Ce type de conditions aux limites caractérise l'échange de chaleur par convection entre un corps et son milieu extérieur fluide. Soit, à titre d'exemple, une paroi verticale dont la température de la surface est t_s et un fluide dont la température t_f est inférieure à t_s (voir Fig. 9.3.). La loi de Newton donne la description mathématique d'un phénomène convectif de transfert de chaleur:

$$q_{s_{conv}} = \alpha(t_s - t_f) \quad (9.27)$$

   Dans la relation précédente, α [W / m^2 K] désigne **le coefficient convectif d'échange thermique**.
   Les conditions aux limites de troisième espèce constituent la description mathématique de la loi de conservation de l'énergie, appliquée au transfert de chaleur entre la paroi et le fluide:

   Le flux thermique sortant par conduction de la paroi égale le flux thermique convectif transmis au fluide:

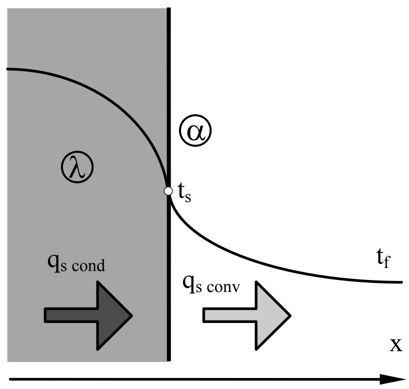


Fig. 9.3.

$$\boxed{-\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{surface} = \alpha\left(t_s - t_f\right)} \qquad (9.28)$$

IV. Conditions aux limites de quatrième espèce: On connaît les conditions de transfert conductif entre deux corps solides en contact thermique parfait (voir Fig. 9.4.). Les conditions aux limites de quatrième espèce affirment que les densités de flux conductifs au niveau de la surface de séparation entre les deux corps sont égales:

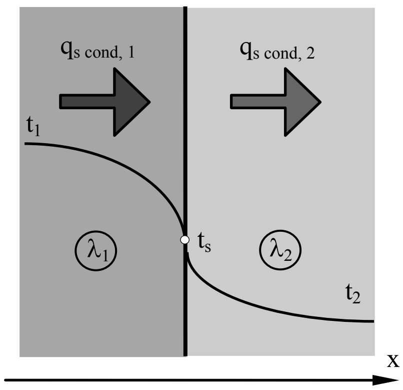


Fig. 9.4.

$$q_{s_{cond,\,1}} = q_{s_{cond,\,2}} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1\left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{surface} = \lambda_2\left(\frac{dt_2}{dx}\right)_{surface} \qquad (9.29)$$

Dans l'analyse suivante, nous considérerons seulement les cas les plus simples, c'est à dire la conduction thermique unidimensionnelle stationnaire. Les autres cas (conduction bi- ou tridimensionnelle stationnaire ou instationnaire) font l'objet des ouvrages de spécialité.

9.3. Conduction thermique unidimensionnelle stationnaire

Le régime stationnaire (constant) est caractérisé par la condition $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$. En conséquence, les équations décrivant le phénomène conductif sont:

- l'équation de Poisson (9.22) lorsqu'il y a des sources internes
- l'équation de Fourier (9.23) lorsque les sources internes sont absentes

Généralement, la résolution d'un problème de transfert thermique conductif comporte deux étapes:

I. La résolution de l'équation différentielle de la conduction, c'est à dire le calcul de la solution particulière en imposant les conditions aux limites afin de trouver le champ de température. La première dérivée de la fonction qui décrit la variation de la température dans le corps représente le gradient de température.

II. Le calcul des grandeurs caractéristiques du transfert thermique (flux thermique, densité de flux, résistances thermiques etc.)

Dans la plupart des cas pratiques rencontrés dans la technique, l'échange thermique conductif se fait par l'intermédiaire des parois, ce qui permet d'encadrer le problème parmi les cas de transfert unidimensionnel.

On peut classifier les parois en:

- parois planes (par exemple, les mûrs des bâtiments)
- parois cylindriques (conduites, tuyaux pour le transport des fluides chauds ou froids)
- parois sphériques (réservoirs sphériques utilisés dans l'industrie chimique)

Ces parois peuvent être homogènes ou inhomogènes (composées de plusieurs couches en matériaux différents - à titre d'exemple, une conduite avec son isolation thermique).

Lorsque la géométrie du corps analysé est compliquée, on peut soit le décomposer en corps simples de type paroi en considérant une conduction unidimensionnelle (méthode peu précise), soit de considérer le processus réel de conduction (bi- ou tridimensionnel) - méthode exacte. Cette dernière méthode soulève de très grandes difficultés concernant le traitement mathématique du problème, puisque dans la plupart des cas, il n'existe aucune solution analytique de l'équation différentielle de la conduction. Dans ce cas, il faut utiliser les méthodes (approximatives) numériques ou analogiques, qui offrent une solution suffisamment précise.

9.3.1. Conduction unidimensionnelle stationnaire sans sources internes

Dans ce paragraphe, nous allons analyser les phénomènes de conduction thermique stationnaire unidimensionnelle sans sources internes dans les cas des parois planes, cylindriques et sphériques (homogènes ou inhomogènes) en utilisant les conditions aux limites de première et troisième espèce

9.3.1.1. Paroi plane

A. <u>Paroi plane homogène</u>

Soit une paroi plane aux faces parallèles, constituée d'une substance homogène dont la conductivité λ est constante. Désignons par δ l'épaisseur de la paroi et supposons (afin d'éviter les déformations des surfaces isothermes aux extrémités de la paroi) que sa hauteur est très grande par rapport à l'épaisseur. En conséquence, le transfert thermique est unidimensionnel, les surfaces isothermes étant des plans parallèles aux faces de la paroi. Soit S la surface de celle-ci.

A.1. Conditions aux limites de première espèce

Soient t_{p1} et t_{p2} les températures (connues) des faces de la paroi ($t_{p1} > t_{p2}$). Fig. 9.5. schématise une section dans la paroi et le champ de température.

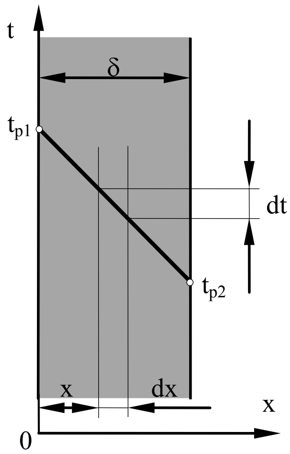


Fig. 9.5.

a. *L'équation du champ de température*

L'équation de Laplace (9.24) devient dans ce cas particulier:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 0 \tag{9.30}$$

L'intégration de (9.30) donne successivement:

$$\frac{dt}{dx} = C_1 \tag{9.31}$$

$$t = C_1 x + C_2 \tag{9.32}$$

La solution générale (9.32) de l'équation contient les deux constantes C_1 et C_2 dont les valeurs doivent être déterminées en imposant les conditions aux limites suivantes:

- *sur la face gauche*: $x = 0 \;\Rightarrow\; t = t_{p1} \;\Rightarrow\; t_{p1} = C_1 0 + C_2$
- *sur la face droite*: $x = \delta \;\Rightarrow\; t = t_{p2} \;\Rightarrow\; t_{p2} = C_1\delta + C_2$ (9.33)

Il résulte:

$$x = 0: \quad C_2 = t_{p1} \tag{9.34}$$

$$x = \delta: \quad C_1 = -\frac{t_{p1} - t_{p2}}{\delta} \tag{9.35}$$

En remplaçant dans (9.32) les constantes C_1 et C_2 données par les dernières deux relations, on obtient **l'équation du champ de température**:

$$\boxed{t(x) = t_{p1} - (t_{p1} - t_{p2})\frac{x}{\delta}} \tag{9.36}$$

On constate que le champ de température est dans ce cas linéaire.

En admettant une dépendence de température de la conductivité du type: $\lambda = \lambda_0(1 + \beta t)$, le champ de température a pour expression mathématique:

$$t(x) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + t_{p1}\right)^2 - \frac{2q_s x}{\lambda_0 \beta}}$$

b. <u>La densité de flux q_s</u>

On calcule q_s en utilisant la loi de Fourier et en tenant compte des relations (9.31) et (9.35). On obtient:

$$q_s = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda C_1 = -\lambda\left(-\frac{t_{p1} - t_{p2}}{\delta}\right)$$

$$\boxed{q_s = \frac{\lambda}{\delta}\left(t_{p1} - t_{p2}\right)} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad (9.37)$$

c. <u>Le flux total</u>

Le flux total Q qui traverse la paroi est:

$$\boxed{Q = q_s S = \frac{\lambda}{\delta} S\left(t_{p1} - t_{p2}\right)} \quad [W] \qquad (9.38)$$

d. <u>La résistance thermique</u>

On peut établir une analogie entre un circuit électrique en courant continu et la paroi plane (voir Fig. 9.6.).

Selon la loi d'Ohm, l'intensité du courant I est égale au rapport de la tension U à la résistance électrique R_e:

$$I = \frac{U}{R_e} \qquad (9.39)$$

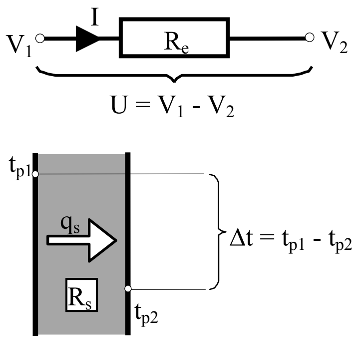


Fig. 9.6.

où la tension représente la différence des potentiels électriques V_1 et V_2 des points *1* respectivement *2*.

La densité de flux q_s s'écrit sous la forme équivalente:

$$q_s = \frac{\Delta t}{\frac{\delta}{\lambda}} = \frac{\Delta t}{R_s} \qquad (9.40)$$

où Δt est la différence des températures t_{p1} et t_{p2} des faces de la paroi. On constate qu'il existe une analogie entre les phénomènes électrique et thermique:

- tous les deux sont des phénomènes de conduction: le premier - de charges électriques, le second - de "charges" thermiques
- dans les deux cas, une différence de potentiel constitue la cause du transfert d'énergie: différence de potentiel électrique = tension U; différence de potentiel thermique = différence de température Δt
- la matière oppose dans les deux cas une résistance au passage de l'énergie (électrique, respectivement thermique)

Par conséquent, la densité de flux est l'analogue de l'intensité I du courant électrique, la différence de température Δt est l'analogue de la tension U. La grandeur

δ / λ, dite **résistance thermique** (R_s) est l'analogue de la résistance électrique R_e. Donc, l'expression:

$$\boxed{R_s = \frac{\delta}{\lambda}} \quad \left[\frac{m^2K}{W}\right] \tag{9.41}$$

représente la résistance thermique de la paroi. L'inverse de la résistance thermique est dite **conductance thermique**.

A.2. Conditions aux limites de troisième espèce

Les conditions de troisième espèce correspondent au cas de l'èchange de chaleur entre deux fluides séparés par une paroi. En conséquence, il y a trois régions du système caractérisés par les échanges thermiques suivants:

- région fluide chaud - paroi: échange thermique convectif
- région de la paroi: échange thermique conductif
- région paroi - fluide froid: échange thermique convectif

Considérons deux fluides dont les températures t_{f1} et t_{f2} sont connues ($t_{f1} > t_{f2}$) séparés par une paroi d'épaisseur δ, dont la conductivité λ est supposée constante (voir Fig. 9.7.). Les coefficients convectifs d'échange α_1 et α_2 sont connus aussi (α_1 - coefficient convectif d'échange entre le fluide chaud et la paroi; α_2 - coefficient convectif d'échange entre la paroi et le fluide froid).

On sait déjà que le champ de température dans la paroi est linéaire. Le problème qui se pose est de déterminer la densité de flux q_s, le flux total échangé entre les deux fluides et les températures t_{p1} et t_{p2} des faces de la paroi.

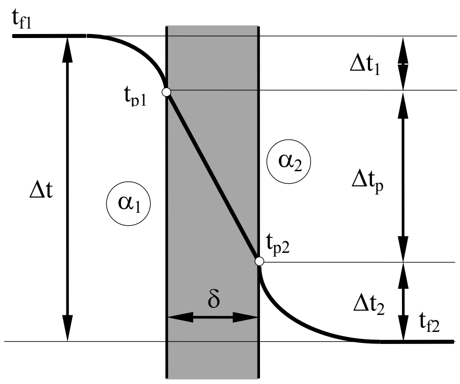


Fig. 9.7.

a. *La densité de flux q_s*

On applique la loi de conservation de l'énergie au transfert thermique entre les deux fluides:

La quantité de chaleur $q_s^{conv.}(\text{fluide}1 - \text{paroi})$ échangée par convection entre le fluide chaud et la paroi égale la quantité de chaleur $q_s^{cond.}(\text{paroi})$ qui passe par conduction à travers la paroi, qui égale la quantité de chaleur $q_s^{conv.}(\text{paroi} - \text{fluide}2)$ échangée par convection entre la paroi et le fluide froid:

$$q_s^{conv.}(\text{fluide}1 - \text{paroi}) = q_s^{cond.}(\text{paroi}) = q_s^{conv.}(\text{paroi} - \text{fluide}2) = q_s \tag{9.42}$$

Compte tenu de la loi de Newton pour l'échange convectif (9.27) et de l'expression (9.37) de la densité de flux, on écrit:

$$q_s^{conv.}(\text{fluide 1} - \text{paroi}) = q_s = \alpha_1(t_{f1} - t_{p1}) = \alpha_1 \Delta t_1 \tag{9.43}$$

$$q_s^{cond.}(\text{paroi}) = q_s = \frac{\lambda}{\delta}(t_{p1} - t_{p2}) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta t_p \tag{9.44}$$

$$q_s^{conv.}(\text{paroi} - \text{fluide 2}) = q_s = \alpha_2(t_{p2} - t_{f2}) = \alpha_2 \Delta t_2 \tag{9.45}$$

On calcule les différences de température:

$$\Delta t_1 = t_{f1} - t_{p1} = \frac{1}{\alpha_1} q_s \tag{9.46}$$

$$\Delta t_p = t_{p1} - t_{p2} = \frac{\delta}{\lambda} q_s \tag{9.47}$$

$$\Delta t_2 = t_{p2} - t_{f2} = \frac{1}{\alpha_2} q_s \tag{9.48}$$

et, par sommation des relations (9.46) - (9.48), on obtient:

$$\Delta t = t_{f1} - t_{f2} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right) q_s \tag{9.49}$$

Par conséquent:

$$\boxed{q_s = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\Delta t}{R_{s,t}}} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{9.50}$$

Dans (9.50), $R_{s,t}$ désigne **la résistance thermique totale**:

$$\boxed{R_{s,t} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = R_{s,1} + R_{s,p} + R_{s,2}} \quad \left[\frac{m^2 K}{W}\right] \tag{9.51}$$

Par identification, il résulte:

$R_{s,1} = \frac{1}{\alpha_1}$: résistance thermique convective à l'échange de chaleur fluide chaud-paroi

$R_{s,p} = \frac{\delta}{\lambda}$: résistance thermique conductive

$R_{s,2} = \frac{1}{\alpha_2}$: résistance thermique convective à l'échange de chaleur paroi - fluide froid

Remarquons donc que la résistance thermique à l'échange de chaleur convectif caractérisé par le coefficient α, a pour expression:

$$\boxed{R_{s,conv} = \frac{1}{\alpha}} \quad \left[\frac{m^2K}{W}\right] \tag{9.52}$$

On constate que la résistance totale se calcule en additionnant les résistances thermiques des régions caractérisées par des differents types d'échange thermique ou par des matériaux ayant des propriétés différentes D le circuit électrique analogue est un circuit en série.

b. *Le flux thermique total*

Afin d'obtenir une relation mathématique générale et simple, on introduit **le coefficient global de transfert** (k_s), représentant le flux échangé à travers une surface unitaire sous une différence de température de 1 K entre les deux fluides:

$$\boxed{k_s = \frac{Q}{S(t_{f1} - t_{f2})}} \quad \left[\frac{W}{m^2K}\right] \tag{9.53}$$

Par conséquent, l'expression du flux échangé entre les deux fluides est:

$$\boxed{Q = k_s S(t_{f1} - t_{f2}) = k_s S \Delta t} \quad [W] \tag{9.54}$$

Comme $q_s = \frac{\Delta t}{R_{s,t}} = \frac{Q}{S}$, on obtient l'expression de k_s par identification:

$$\boxed{k_s = \frac{1}{R_{s,t}} = \frac{1}{R_{s,1} + R_{s,p} + R_{s,2}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}} \tag{9.55}$$

Donc, *le coefficient global de transfert est l'inverse de la résistance thermique totale*. Généralement, pour des raisons de simplicité, on écrit k_s sous la forme:

$$\frac{1}{k_s} = R_{s,t} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \tag{9.56}$$

c. *Les températures des faces de la paroi*

De l'équation (9.46) on tire:

$$t_{p1} = t_{f1} - \frac{1}{\alpha_1} q_s = t_{f1} - R_{s,1} q_s \tag{9.57}$$

De même pour l'équation (9.48):

$$t_{p2} = t_{f2} + \frac{1}{\alpha_2} q_s = t_{f2} + R_{s,2} q_s \tag{9.58}$$

B. Paroi plane inhomogène

Le terme “inhomogène” désigne dans ce cas des parois composées de couches en matériaux différents. Le contact thermique est dit “**imparfait**” lorsqu’au niveau de la surface de contact entre les couches il existe une résistance thermique supplémentaire. Ce type de contact caractérise les surfaces avec irrégularités qui forment des microcavités remplies d’air (qui est un bon isolateur thermique) ou couvertes de couches minces en substances ayant une résistance thermique élevée (des oxydes par exemple). La résistance thermique supplémentaire, dite **résistance thermique de contact** ($R_{s,c}$), est à l’origine d’un saut ou discontinuité (Δt_c) dans le champ de température puisque l’épaisseur de la surface de contact est pratiquement nulle. En cas d’un contact parfait, $R_{s,c} = 0$ et $\Delta t_c = 0$, le champ de température est continu sur la surface de contact.

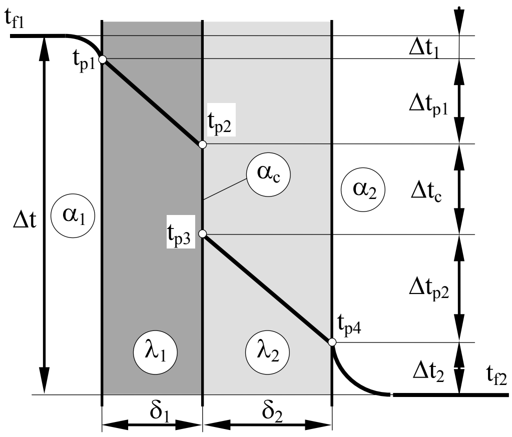


Fig. 9.8.

Dans les calculs on introduit la résistance thermique de contact par l’intermédiaire de la **conductance de contact** α_c:

$$\boxed{R_{s,c} = \frac{1}{\alpha_c}} \tag{9.59}$$

Considérons une paroi inhomogène (voir Fig. 9.8.) constituée de deux couches d’épaisseurs δ_1 et δ_2 en matériaux différents, dont les conductivités sont λ_1 et λ_2. La paroi sépare deux fluides dont les températures sont $t_{f1} > t_{f2}$ (on supposse aussi que les coefficients convectifs α_1 et α_2 sont connus D conditions aux limites de troisième espèce).

En tenant compte de l’analogie électrique, on écrit l’expression de la résistance thermique totale $R_{s,t}$:

$$R_{s,t} = R_{s,1} + R_{s,p1} + R_{s,c} + R_{s,p2} + R_{s,2} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_c} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} \tag{9.60}$$

Par conséquent, le coefficient global de transfert a pour expression mathématique:

$$\frac{1}{k_s} = R_{s,t} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_c} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} \tag{9.61}$$

En cas d'une paroi constituée de *n* couches différentes, le coefficient global de transfert s'écrit:

$$\frac{1}{k_s} = R_{s,t} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_{c,i}} + \frac{1}{\alpha_2} \tag{9.62}$$

où δ_i et λ_i sont l'épaisseur, respectivement la conductivité de la couche *i* et $\alpha_{c,i}$ est la conductance de contact entre les couches *i* et *i + 1*.

La densité de flux:

$$q_s = k_s \Delta t = k_s (t_{f1} - t_{f2}) = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{s,t}} \tag{9.62}$$

Le flux total:

$$Q = q_s S = k_s S (t_{f1} - t_{f2}) \tag{9.63}$$

Les températures intermédiaires:

$$t_{p1} = t_{f1} - R_{s,1} q_s = t_{f1} - \frac{1}{\alpha_1} q_s \tag{9.64}$$

$$t_{p2} = t_{f1} - (R_{s,1} + R_{s,p1}) q_s = t_{f1} - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right) q_s \tag{9.65}$$

$$t_{p3} = t_{f2} + (R_{s,p2} + R_{s,2}) q_s = t_{f2} + \left(\frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right) q_s \tag{9.66}$$

$$t_{p4} = t_{f2} + R_{s,2} q_s = t_{f2} + \frac{1}{\alpha_2} q_s \tag{9.67}$$

9.3.1.2. Paroi cylindrique

A. Paroi cylindrique homogène

Considérons un tube cylindrique dont les rayons intérieur, respectivement extérieur sont r_1 et r_2 (d_1 et d_2 - diamétres correspondants). La longueur *l* du tube est supposée très supérieure au diamètre extérieur d_2 afin de réduire au minimum les déformations du champ de température aux bouts du tube.

Le matériau du tube est homogène et sa conductivité λ est supposée constante.

A.1. Conditions aux limites de première espèce

On connaît les températures de la surface intérieure t_{p1}, respectivement extérieure t_{p2} ($t_{p1} > t_{p2}$). A cause de la symétrie, sur la Fig. 9.9. on a représenté seulement la moitié droite du tube.

Dans les conditions aux limites imposées, les surfaces isothermes sont des cylindres coaxiaux dont le rayon r est compris entre r_1 et r_2. Par conséquent, le transfert de chaleur est unidimensionnel (radial).

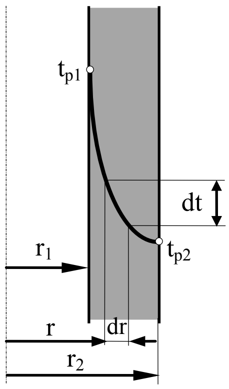


Fig. 9.9.

a. *Equation du champ de température*

L'équation de Laplace écrite dans des coordonnées cylindriques est dans ce cas particulier:

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} = 0 \qquad (9.68)$$

On récrit cette équation sous la forme suivante:

$$r\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{dt}{dr} = 0 \qquad (9.69)$$

$$Þ \quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) = 0 \qquad (9.70)$$

En intégrant (9.70) on obtient successivement:

$$r\frac{dt}{dr} = C_1 \qquad (9.71)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} \qquad (9.72)$$

$$\Rightarrow \quad t(r) = C_1\, ln\, r + C_2 \qquad (9.73)$$

On impose les conditions aux limites:

$$r = r_1 \quad \Rightarrow \quad t = t_{p1} \quad \Rightarrow \quad t_{p1} = C_1\, ln\, r_1 + C_2$$

$$r = r_2 \quad \Rightarrow \quad t = t_{p2} \quad \Rightarrow \quad t_{p2} = C_1\, ln\, r_2 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad t_{p1} - t_{p2} = C_1\, ln\frac{r_1}{r_2} = -C_1\, ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -\frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (9.74)$$

En portant (9.74) dans la première condition aux limites, on trouve:

$$C_2 = t_{p1} + \frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{r_2}{r_1}} ln\, r_1 \qquad (9.75)$$

Avec C_1 et C_2 données par (9.74), respectivement (9.75), la solution générale (9.73) devient:

$$\boxed{t = t_{p1} - \frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{r_2}{r_1}} ln\frac{r}{r_1} = t_{p1} - \frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{d_2}{d_1}} ln\frac{d}{d_1}} \qquad (9.76)$$

Si l'on suppose que λ dépend de la température selon la loi linéaire: $\lambda = \lambda_o (1+\beta t)$, l'équation du champ de température devient:

$$t(r) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + t_{p1}\right)^2 - q_l \frac{ln\frac{r}{r_1}}{\pi\lambda_0\beta}}$$

b. <u>*Le flux total*</u>

Selon la loi de Fourier, le flux qui passe par la surface isotherme *S* dont le rayon est *r*, s'écrit:

$$Q = -\lambda S\frac{dt}{dr} = -\lambda(2\pi r l)\frac{dt}{dr} \qquad (9.77)$$

Compte tenu de (9.72) et de (9.74), l'équation ci-dessus devient:

$$Q = -\lambda(2\pi r l)\frac{C_1}{r} = -2\pi\lambda l C_1 = 2\pi\lambda l\frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

L

$$\boxed{Q = 2\pi\lambda l\frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{r_2}{r_1}} = 2\pi\lambda l\frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\frac{d_2}{d_1}}} \qquad (9.78)$$

c. <u>*Le flux linéaire q_l*</u>

Puisque la surface S = 2πrl dépend du rayon *r*, la densité de flux q_s dépend aussi du rayon *r*. Par conséquent, celle-ci ne peut plus jouer le rôle de critère de comparaison. Dans le cas des parois cylindriques, on calcule **le flux linéaire** q_l, défini comme le flux correspondant à une longueur unitaire de la paroi:

$$\boxed{q_l = \frac{Q}{l}} \quad \left[\frac{W}{m}\right] \qquad (9.79)$$

Dans certains cas il est utile de calculer la densité de flux q_s. On détermine la relation entre q_l et q_s en écrivant:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{q_s S}{l} = q_l \frac{\pi d l}{l} = \pi d q_s \tag{9.80}$$

$$\text{L} \quad q_l = \pi d_1 q_{s1} = \pi d_2 q_{s2} \tag{9.81}$$

où q_{s1} et q_{s2} sont les densités de flux rapportées aux surfaces intérieure, respectivement extérieure de la paroi.

Compte tenu de (9.78), le flux linéaire est:

$$\boxed{q_l = 2\pi\lambda \frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\dfrac{r_2}{r_1}} = 2\pi\lambda \frac{t_{p1} - t_{p2}}{ln\dfrac{d_2}{d_1}}} \tag{9.82}$$

d. <u>*La résistance thermique linéaire*</u>

On écrit (9.82) sous la forme correspondant à l'analogie électrique:

$$q_l = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\dfrac{1}{2\pi\lambda} ln\dfrac{d_2}{d_1}} = \frac{\Delta t}{R_l} \tag{9.83}$$

Par conséquent, R_l désigne la **résistance thermique linéaire**, définie par la relation:

$$\boxed{R_l = \frac{1}{2\pi\lambda} ln\frac{d_2}{d_1}} \quad \left[\frac{mK}{W}\right] \tag{9.84}$$

A.1. <u>Conditions aux limites de troisième espèce</u>

Pour résoudre le problème, on doit d'abord déduire l'expression de la **résistance thermique linéaire convective**, c'est à dire la résistance thermique correspondant à une longueur unitaire de la paroi en cas d'un transfert de chaleur convectif entre la paroi et un fluide (voir Fig. 9.10.).

Soient une paroi cylindrique de rayon extérieur r dont la température de la surface extérieure est t_p et un fluide de température t_f (on suppose $t_p > t_f$). La paroi et le fluide échangent de la chaleur par convection (le coefficient convectif α est connu). En désignant par l la longueur de la paroi, la surface extérieure de celle-ci est $S = 2\pi r l = \pi d l$ (d - diamètre extérieur). Selon la loi de Newton, le flux thermique échangé entre le paroi et le fluide s'écrit:

$$Q = \alpha S\left(t_p - t_f\right) = \alpha\pi d l\left(t_p - t_f\right)$$

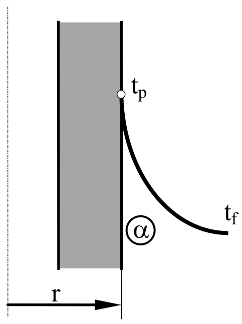


Fig. 9.10.

Le flux linéaire convectif est donc:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \pi d\alpha\left(t_p - t_f\right) \tag{9.85}$$

En écrivant le flux linéaire dans la forme correspondant à l'analogie électrique:

$$q_l = \frac{t_p - t_f}{\dfrac{1}{\pi d\alpha}} = \frac{\Delta t}{R_{l,conv}} \tag{9.86}$$

on obtient l'expression mathématique de la résistance thermique linéaire convective:

$$\boxed{R_{l,conv} = \frac{1}{\pi d\alpha}} \quad \left[\frac{mK}{W}\right] \tag{9.87}$$

Soient maintenant deux fluides dont les températures t_{f1} et t_{f2} sont connues ($t_{f1} > t_{f2}$) et qui échangent de la chaleur par l'intermédiaire d'une paroi cylindrique dont les rayons intérieur et extérieur sont respectivement r_1 et r_2. Le matériau de la paroi est homogène et la conductivité λ est supposée constante. On connaît les coefficients convectifs α_1 (du fluide chaud, coulant à l'intérieur de la paroi) et α_2 (du fluide froid, coulant à l'extérieur de la paroi). Sur la Fig. 9.11. on a schématisé le système analysé.

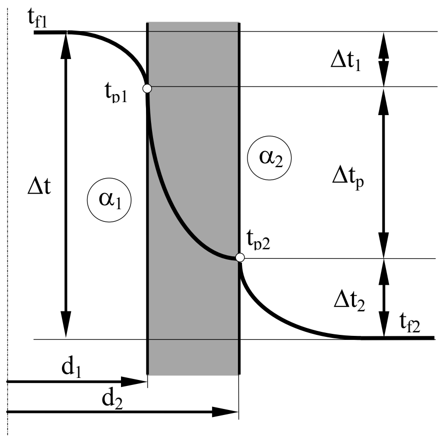


Fig. 9.11.

a. *<u>Le flux linéaire</u>*

La loi de conservation de l'énergie donne:

La quantité de chaleur $q_l^{conv.}\left(\text{fluide}\,1 - \text{paroi}\right)$ échangée par convection entre le fluide chaud et la paroi égale la quantité de chaleur $q_l^{cond.}\left(\text{paroi}\right)$ qui passe par conduction à travers la paroi, et égale la quantité de chaleur $q_l^{conv.}\left(\text{paroi} - \text{fluide}\,2\right)$ échangée par convection entre la paroi et le fluide froid:

$$q_l^{conv.}\left(\text{fluide}\,1 - \text{paroi}\right) = q_l^{cond.}\left(\text{paroi}\right) = q_l^{conv.}\left(\text{paroi} - \text{fluide}\,2\right) = q_l \tag{9.88}$$

Comme:

$$q_1^{conv.}(\text{fluide}\,1-\text{paroi}) = q_1 = \pi d_1\alpha_1(t_{f1}-t_{p1}) = \pi d_1\alpha_1\Delta t_1 = \frac{\Delta t_1}{\dfrac{1}{\pi d_1\alpha_1}} = \frac{\Delta t_1}{R_{1,1}}$$

$$q_1^{cond.}(\text{paroi}) = q_1 = 2\pi\lambda\frac{t_{p1}-t_{p2}}{ln\dfrac{d_2}{d_1}} = 2\pi\lambda\frac{\Delta t_p}{ln\dfrac{d_2}{d_1}} = \frac{\Delta t_p}{\dfrac{1}{2\pi\lambda}ln\dfrac{d_2}{d_1}} = \frac{\Delta t_p}{R_{1,p}}$$

$$q_1^{conv.}(\text{paroi}-\text{fluide}\,2) = q_1 = \pi d_2\alpha_2(t_{p2}-t_{f2}) = \pi d_2\alpha_2\Delta t_2 = \frac{\Delta t_2}{\dfrac{1}{\pi d_2\alpha_2}} = \frac{\Delta t_2}{R_{1,2}}$$

on écrit les différences de température correspondant aux trois régions de transfert de chaleur du système:

$$t_{f1}-t_{p1} = \Delta t_1 = \frac{1}{\pi d_1\alpha_1}q_1 = R_{1,1}q_1 \qquad (9.89)$$

$$t_{p1}-t_{p2} = \Delta t_p = \frac{1}{2\pi\lambda}ln\frac{d_2}{d_1}q_1 = R_{1,p}q_1 \qquad (9.90)$$

$$t_{p2}-t_{f2} = \Delta t_2 = \frac{1}{\pi d_2\alpha_2}q_1 = R_{1,2}q_1 \qquad (9.91)$$

En additionnant les relations ci-dessus on trouve:

$$t_{f1}-t_{f2} = \Delta t = \left(\frac{1}{\pi d_1\alpha_1}+\frac{1}{2\pi\lambda}ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{\pi d_2\alpha_2}\right)q_1 = (R_{1,1}+R_{1,p}+R_{1,2})q_1 = R_{1,t}q_1 \qquad (9.92)$$

On obtient:

$$\boxed{q_1 = \frac{t_{f1}-t_{f2}}{\dfrac{1}{\pi d_1\alpha_1}+\dfrac{1}{2\pi\lambda}ln\dfrac{d_2}{d_1}+\dfrac{1}{\pi d_2\alpha_2}} = \frac{t_{f1}-t_{f2}}{R_{1,1}+R_{1,p}+R_{1,2}} = \frac{\Delta t}{R_{1,t}}} \quad \left[\frac{W}{m}\right] \qquad (9.93)$$

Dans les relations précédentes on a désigné par:

$R_{1,1} = \dfrac{1}{\pi d_1\alpha_1}$ - la résistance thermique linéaire convective fluide chaud - paroi

$R_{1,p} = \dfrac{1}{2\pi\lambda}ln\dfrac{d_2}{d_1}$ - la résistance thermique linéaire conductive de la paroi;

$R_{1,2} = \dfrac{1}{\pi d_2\alpha_2}$ - la résistance thermique linéaire convective paroi - fluide froid

$R_{1,t} = R_{1,1}+R_{1,p}+R_{1,2}$ - la résistance thermique linéaire totale entre les deux fluides

b. *Le flux total*

Le flux total Q échangé entre les deux fluides par l'intermédiaire de la paroi se calcule en utilisant **le coefficient global linéaire de transfert** k_l défini par:

$$k_l = \frac{Q}{l\Delta t} \quad \left[\frac{W}{mK}\right] \tag{9.94}$$

Le coefficient global linéaire de transfert représente le flux de chaleur échangé par une portion de la paroi de longueur unitaire sous une différence de température de 1 K entre les deux fluides.

On écrit donc:

$$Q = k_l l\left(t_{f1} - t_{f2}\right) = k_l l\Delta t \tag{9.95}$$

Compte tenu que $Q = q_l l$ et que $q_l = \frac{\Delta t}{R_{l,t}}$, on trouve:

$$\boxed{k_l = \frac{1}{R_{l,t}} = \frac{1}{\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2}}} \tag{9.96}$$

c. *Les températures de la paroi*

Compte tenu de l'équation (9.89), on écrit:

$$t_{p1} = t_{f1} - \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} q_l = t_{f1} - R_{l,1} q_l \tag{9.97}$$

De même pour l'équation (9.91):

$$t_{p2} = t_{f2} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2} q_l = t_{f2} + R_{l,2} q_l \tag{9.98}$$

B. Paroi cylindrique inhomogène

Soit, à titre d'exemple, une paroi cylindrique constituée de deux couches dont le contact thermique imparfait est caractérisé par la conductance thermique de contact α_c. La paroi sépare deux fluides dont les températures $t_{f1} > t_{f2}$ sont connues, ainsi que les coefficients convectifs α_1 et α_2. Les fluides échangent de la chaleur par l'intermédiaire de la paroi (voir Fig. 9.12.).

Le coefficient global linéaire de transfert k_l est défini par la relation:

$$\frac{1}{k_l} = R_{l,t} = R_{l,1} + R_{l,p1} + R_{l,c} + R_{l,p2} + R_{l,2} =$$

$$= \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_1} ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_c} + \frac{1}{2\pi\lambda_2} ln\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\pi d_3 \alpha_2} \tag{9.99}$$

Généralement, pour *n* couches:

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\lambda_i} ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\pi d_{i+1} \alpha_{c,i}} + \frac{1}{\pi d_{n+1} \alpha_2}$$

où d_i et d_{i+1} sont les diamètres intérieur, respectivement extérieur de la couche *i*, dont la conductivité est λ_i et $\alpha_{c,i}$ est la conductance thermique de contact entre les couches *i* et *i + 1*.

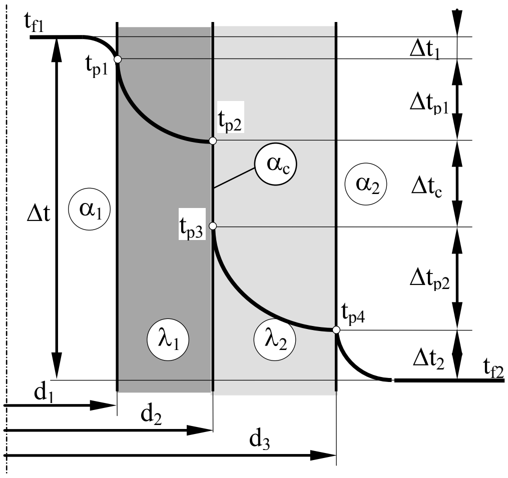


Fig. 9.12.

Le flux linéaire:

$$q_1 = k_1 \Delta t = k_1 (t_{f1} - t_{f2}) = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{1,t}} \quad (9.100)$$

Le flux total:

$$Q = q_1 l = k_1 l \Delta t = k_1 l (t_{f1} - t_{f2}) \quad (9.101)$$

Les températures intermédiaires:

$$t_{p1} = t_{f1} - R_{1,1} q_1 = t_{f1} - \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} q_1 \quad (9.102)$$

$$t_{p2} = t_{f1} - (R_{1,1} + R_{1,p1}) q_1 = t_{f1} - \left(\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_1} ln \frac{d_2}{d_1} \right) q_1 \quad (9.103)$$

$$t_{p3} = t_{f2} + (R_{1,2} + R_{1,p2}) q_1 = t_{f2} + \left(\frac{1}{\pi d_3 \alpha_2} + \frac{1}{2\pi\lambda_2} ln \frac{d_3}{d_2} \right) q_1 \quad (9.104)$$

$$t_{p4} = t_{f2} + R_{1,2} q_1 = t_{f2} + \frac{1}{\pi d_3 \alpha_2} q_1 \quad (9.105)$$

9.3.1.3. Paroi sphérique

Considérons une paroi sphérique dont le rayons intérieur, respectivement extérieur sont r_1 et r_2 (d_1 et d_2 - diamètres correspondants). La conductivité λ de la paroi (supposée homogène) est constante.

1. <u>Conditions aux limites de première espèce</u>

On connaît les températures $t_{p1} > t_{p2}$ des surfaces intérieure, respectivement extérieure de la paroi (voir Fig. 9.13.). A cause de la symétrie géométrique de la sphère et de l'uniformité des températures sur les surfaces de la paroi, le transfert de chaleur est unidimensionnel.

a. *Equation du champ de température*

L'équation de Laplace en coordonnées sphériques, appliquée au cas étudié s'écrit:

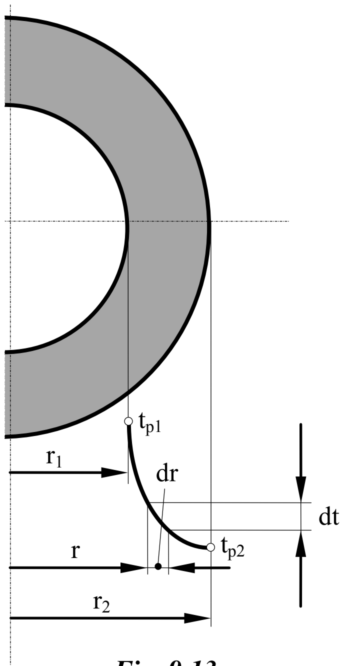


Fig. 9.13.

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dt}{dr} = 0 \qquad (9.106)$$

On multiplie par r^2 l'équation ci-dessus afin d'obtenir une forme plus facile à intégrer:

$$r^2\frac{d^2t}{dr^2} + 2r\frac{dt}{dr} = 0$$

$$\text{L} \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dt}{dr}\right) = 0 \qquad (9.107)$$

En intégrant (9.107) en deux étapes, on obtient successivement:

$$r^2\frac{dt}{dr} = C_1$$

$$\text{L} \quad \frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \qquad (9.108)$$

$$\text{L} \quad t = -\frac{C_1}{r} + C_2 \qquad (9.109)$$

L'éxpression (9.109) représente la solution générale de l'équation du champ de température dans la paroi sphérique. On la transforme en solution particulière, en imposant les conditions aux limites:

$$r = r_1: \quad t = t_{p1} \quad \Rightarrow \quad t_{p1} = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \qquad (9.110)$$

$$r = r_2: \quad t = t_{p2} \quad \Rightarrow \quad t_{p2} = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \qquad (9.111)$$

On soustrait (9.111) de (9.110), en résultant:

$$t_{p1} - t_{p2} = -C_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{t_{p1} - t_{p2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \qquad (9.112)$$

On remplace la constante C_1 donnée par (9.112) dans (9.110), en obtenant C_2:

$$C_2 = t_{p1} + \frac{C_1}{r_1} = t_{p1} - \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\frac{1}{r_1} \qquad (9.113)$$

En portant (9.112) et (9.113) dans la solution générale (9.107), on trouve l'équation du champ de température:

$$t(r) = t_{p1} - \left(t_{p1} - t_{p2}\right)\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \qquad (9.114)$$

b. <u>*Le flux total*</u>

On calcule le flux thermique Q en appliquant la loi de Fourier:

$$Q = -\lambda S\frac{dt}{dr} = -\lambda\left(4\pi r^2\right)\frac{dt}{dr} \qquad (9.115)$$

Comme $\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$, compte tenu de (9.112) on trouve:

$$\boxed{Q = 4\pi\lambda\frac{t_{p1} - t_{p2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 2\pi\lambda\frac{t_{p1} - t_{p2}}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}} \qquad (9.116)$$

Il est inutile de calculer une densité de flux puisque celle-ci dépend du rayon.

2. <u>Conditions aux limites de deuxième espèce</u>

Considérons deux fluides: l'un chaud (température: t_{f1}), renfermé dans une enceinte sphérique constituant la paroi analysée et l'autre froid (température: t_{f2}), situé à l'extérieur de la paroi. Les deux fluides échangent de la chaleur par l'intermédiaire de la paroi (les coefficients convectifs α_1 et α_2 sont connnus) - schématisation sur la Fig. 9.14.

On écrit la conservation d'énergie:

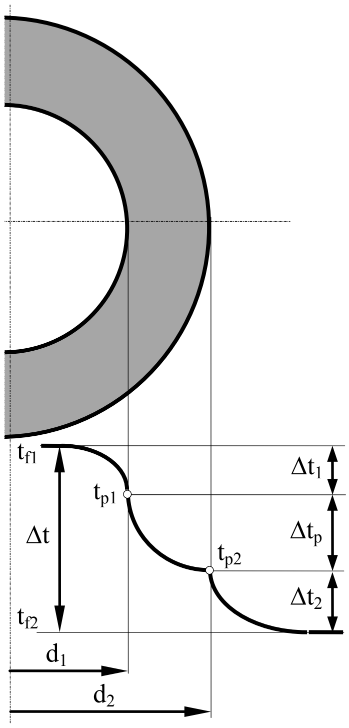


Fig. 9.14.

$$Q^{conv.}(\text{fluide}\,1-\text{paroi}) = Q^{cond.}(\text{paroi}) = = Q^{conv.}(\text{paroi}-\text{fluide}\,2) = Q \qquad (9.117)$$

où:

$$Q^{conv.}(\text{fluide}1-\text{paroi}) = \alpha_1 S_1 (t_{f1} - t_{p1}) = = \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{f1} - t_{p1}) = \alpha_1 \pi d_1^2 \Delta t_1 = Q \qquad (9.118)$$

$$Q^{cond.}(\text{paroi}) = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{p1} - t_{p2}) = = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \Delta t_p \qquad (9.119)$$

$$Q^{conv.}(\text{paroi}-\text{fluide}2) = \alpha_2 S_2 (t_{p2} - t_{f2}) = = \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{p2} - t_{f2}) = \alpha_2 \pi d_2^2 \Delta t_2 = Q \qquad (9.120)$$

En écrivant les différences de température:

$$t_{f1} - t_{p1} = \Delta t_1 = \frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} Q \qquad (9.121)$$

$$t_{p1} - t_{p2} = \Delta t_p = \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) Q \qquad (9.122)$$

$$t_{p2} - t_{f2} = \Delta t_2 = \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2} Q \qquad (9.123)$$

et en les additionnant, on obtient:

$$t_{f1} - t_{f2} = \Delta t = \left[\frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2}\right] Q \qquad (9.124)$$

et on trouve finalement:

$$Q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2}} \tag{9.125}$$

En écrivant:

$$Q = k_{sph}\left(t_{f1} - t_{f2}\right) = k_{sph}\Delta t \tag{9.126}$$

on définit par identification **le coefficient global de transfert de la paroi sphérique**, k_{sph}:

$$k_{sph} = \frac{1}{\frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2}} \quad \left[\frac{W}{K}\right] \tag{9.127}$$

En utilisant les équations (9.121) et (9.123), on calcule les températures intermédiaires:

$$t_{p1} = t_{f1} - \frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} Q \tag{9.128}$$

$$t_{p2} = t_{f2} + \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2} Q \tag{9.129}$$

9.3.2. Conduction unidimensionnelle stationnaire avec sources internes

Dans certains processus (appareils électriques, réactions chimiques, absorption du rayonnement, éléments combustibles des réacteurs nucléaires, etc.) la conduction thermique est accompagnée d'un engendrement interne de chaleur dû aux sources internes disséminées dans la masse de la substance. L'effet de l'action des sources internes se mesure par la densité volumique de flux q_v $\left[\frac{W}{m^3}\right]$.

L'équation différentielle de la conduction a pour expression particulière correspondante, l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \tag{9.130}$$

Dans ce paragraphe on considérera le processus de transfert de chaleur conductif stationnaire unidimensionnel avec sources internes dans le cas d'une paroi plane et d'un cylindre plein.

9.3.2.1. Paroi plane

Soit une paroi plane d'épaisseur 2δ, dont la longueur et la hauteur sont bien supérieures à l'épaisseur. Dans le volume de la paroi il y a des sources internes uniformément distribuées qui engendrent le flux volumique q_v. La paroi, dont la conductivité thermique λ est constante, est refroidie par deux fluides dont les températures $t_{f1} > t_{f2}$ sont aussi connues (voir Fig. 9.15.). Le processus de transfert de chaleur est unidimensionnel (dans la direction de l'axe *Ox*). La température maximale est atteinte à la distance x_m par rapport à la face gauche de la paroi. Le flux thermique évacué par cette face est Q_1 et le flux évacué par la face droite est Q_2.

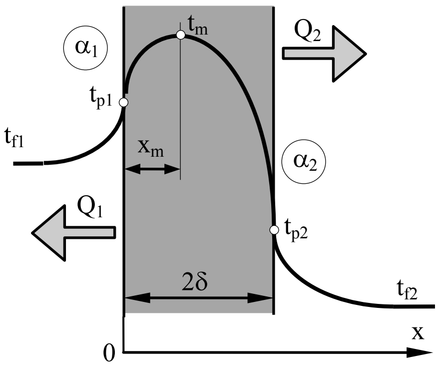


Fig. 9.15.

a. <u>Equation du champ de température</u>

L'équation de Poisson écrite pour ce cas particulier est:

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (9.131)$$

La solution générale s'obtient en intégrant (9.131) deux fois:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda}x + C_1 \qquad (9.132)$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.133)$$

1. <u>Conditions aux limites de première espèce</u>

Les températures des faces de la paroi $t_{p1} > t_{p2}$ sont connues. On impose:

$$x = 0: \quad t = t_{p1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = t_{p1} \qquad (9.134)$$

$$x = 2\delta: \quad t = t_{p2} \quad \Rightarrow \quad t_{p2} = -\frac{q_v}{2\lambda}4\delta^2 + 2\delta C_1 + t_{p1} = -2q_v\frac{\delta^2}{2\lambda} + 2\delta C_1 + t_{p1}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{q_v}{\lambda}\delta - \frac{t_{p1} - t_{p2}}{2\delta} \qquad (9.135)$$

On porte (9134) et (9.135) dans (9.133) et on obtient l'équation du champ de température:

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{q_v\delta}{\lambda} - \frac{t_{p1} - t_{p2}}{2\delta}\right)x + t_{p1} \tag{9.136}$$

L'équation (9.136) met en évidence une variation de type parabolique de la température à travers la paroi. En égalant à zéro la dérivée de l'équation précédente, on obtient la coordonnée x_m du maximum de la température:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{q_v}{\lambda}x_m + C_1 = 0 \Rightarrow -\frac{q_v}{\lambda}x_m + \frac{q_v}{\lambda}\delta - \frac{t_{p1} - t_{p2}}{2\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_m = \delta - \left(t_{p1} - t_{p2}\right)\frac{\lambda}{2\delta q_v} \tag{9.137}$$

La condition $0 \le x_m \le 2\delta$, c'est à dire que le point de maximum se trouve dans l'intérieur de la paroi, conduit à:

$$-1 \le \frac{\lambda}{2\delta^2 q_v}\left(t_{p1} - t_{p2}\right) \le 1 \tag{9.138}$$

En remplaçant x_m donné par (9.137) dans l'équation du champ de température (9.136) on trouve la valeur maximale de la température:

$$t_m = \frac{q_v\delta^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{8q_v\delta^2}\left(t_{p1} - t_{p2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(t_{p1} + t_{p2}\right) \tag{9.139}$$

b. *Le flux échangé*

On écrit les deux flux Q_1 et Q_2 en appliquant la loi de Fourier et en tenant compte de (9.132):

$$Q_1 = -\lambda S\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda S\left(-\frac{q_v}{\lambda}0 + C_1\right) = -\lambda SC_1$$

$$Q_2 = -\lambda S\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=2\delta} = -\lambda S\left(-\frac{q_v}{\lambda}2\delta + C_1\right) = 2S\delta q_v - \lambda SC_1$$

Le flux total Q échangé par la paroi représente la somme de deux flux Q_1 et Q_2 (on considère la valeur absolue de Q_1 puisque celui-ci est orienté vers les x négatifs):

$$Q = \left|Q_1\right| + Q_2 = 2S\delta q_v \quad [W] \tag{9.140}$$

On constate que le flux échangé est en fait le produit de la densité volumique de flux q_v par le volume 2δS de la paroi.

2. Conditions aux limites de troisième espèce

On impose: $\quad x = 0: \quad -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = -\alpha_1\left(t_{p1} - t_{f1}\right)$

$$\Rightarrow \quad \lambda\left(\frac{q_v\delta}{\lambda}-\frac{t_{p1}-t_{p2}}{2\delta}\right)=\alpha_1\left(t_{p1}-t_{f1}\right) \tag{9.141}$$

$$x=2\delta: \quad -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=2\delta}=\alpha_2\left(t_{p2}-t_{f2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda\left(\frac{q_v\delta}{\lambda}-\frac{t_{p1}-t_{p2}}{2\delta}\right)=\alpha_2\left(t_{p2}-t_{f2}\right) \tag{9.142}$$

Dans la première condition, le signe “moins” montre que le sens du transfert de chaleur est opposé au sens de de l’axe *Ox*; les dérivées dans les deux conditions aux limites ont été évaluées compte tenu de (9.132) et (9.135).

Les relations (9.141) et (9.142) constituent ensemble un système d’équations dont la solution est représentée par les températures des faces de la paroi:

$$t_{p1}=t_{f1}+\frac{t_{f2}-t_{f1}+2q_v\delta\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{\delta}{\lambda}\right)}{1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+2\frac{\alpha_1}{\lambda}\delta} \tag{9.143}$$

$$t_{p2}=t_{f2}+\frac{t_{f1}-t_{f2}+2q_v\delta\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}\right)}{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\frac{\alpha_2}{\lambda}\delta} \tag{9.144}$$

On remplace dans (9.136) les températures t_{p1} et t_{p2} données par (9.143) respectivement (9.144) en obtenant l’équation du champ de température dans ce cas. En égalant à zéro la dérivée de la température, on obtient x_m.

b. *Le flux échangé*

Le flux total est déterminé par la relation:

$$Q=\left|Q_1\right|+Q_2=\left[\alpha_1\left(t_{p1}-t_{f1}\right)+\alpha_2\left(t_{p2}-t_{f2}\right)\right]S \quad [W] \tag{9.145}$$

Remarque

Lorsque les deux faces de la paroi sont également refroidies, c’est à dire que $t_{f1}=t_{f2}$, il résulte un champ de température symétrique dont la valeur maximale se situe à la moitié de l’épaisseur de la paroi et $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}Q$.

9.3.2.2. Cylindre plein

Considérons un cylindre plein de rayon R, dont la longueur $l >> 2R$. Le matériau du cylindre, dont la conductivité λ est constante, produit la densité volumique de flux q_v à cause des sources internes qui sont également distribuées dans la masse de celui-ci. Le cylindre est refroidi par un fluide dont on connaît la température t_f et le coefficient convectif α (voir Fig. 9.16.). Le transfert de chaleur est unidimensionnel.

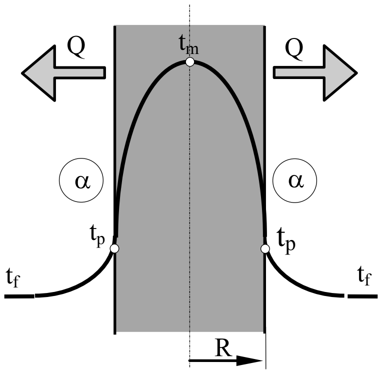


Fig. 9.16.

a. <u>*Equation du champ de température*</u>

L'équation de Poisson en coordonnées cylindriques est:

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \tag{9.146}$$

En intégrant deux fois, on trouve successivement:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) = -\frac{q_v}{\lambda} r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{r^2}{2} + C_1 \tag{9.147}$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{r^2}{4} + C_1 \, ln\, r + C_2 \tag{9.148}$$

1. <u>Conditions aux limites de première espèce</u>

En connaissant t_p, on impose les conditions suivantes:

$r = 0$: $\quad \frac{dt}{dr} = 0$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \tag{9.149}$$

$r = R$: $\quad t = t_p \quad \Rightarrow \quad t_p = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{R^2}{4} + C_2$

$$\Rightarrow \quad C_2 = t_p + \frac{q_v}{\lambda}\frac{R^2}{4} \tag{9.150}$$

La première condition affirme que le flux est nul sur l'axe du cylindre, c'est à dire qu'en raison de la symétrie géométrique et thermique, la température atteint son

maximum sur l'axe.

On porte (9.149) et (9.150) dans (9.148), en obtenant l'équation du champ de température:

$$t = t_p + \frac{q_v}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right) = t_p + \frac{q_v R^2}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{9.151}$$

En posant r = 0, on trouve la valeur maximale de la température:

$$\Rightarrow \quad t_m = t_p + \frac{q_v}{4\lambda}R^2 \tag{9.152}$$

2. <u>Conditions aux limites de troisième espèce</u>

La condition de flux nul sur l'axe est la même. Il reste que:

$$r = R: \quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(t_p - t_f\right)$$

Compte tenu de (9.147) et vu que $C_1 = 0$, on trouve:

$$t_p = \frac{q_v R}{2\alpha} + t_f \tag{9.153}$$

On calcule la constante C_2 en tenant compte de (9.148) et que r = R L $t = t_p$. Il résulte:

$$C_2 = t_f + \frac{q_v R}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda}R^2 \tag{9.154}$$

Par conséquent:

$$t = t_f + \frac{q_v R}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right) \tag{9.155}$$

En posant r = 0 on trouve:

$$t_m = t_f + \frac{q_v}{2\alpha}R + \frac{q_v}{4\lambda}R^2 \tag{9.156}$$

b. <u>*Le flux échangé*</u>

Afin d'évaluer la densité de flux q_s sur la surface du cylindre, on pose:

$$q_{s(r=R)} = -\lambda\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=R}$$

et compte tenu de (9.147) et (9.149) on trouve:

$$q_{s(r=R)} = q_v \frac{R}{2} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{9.157}$$

Par conséquent, le flux total est:

$$Q = q_{s(r=R)} S = q_{s(r=R)} 2\pi R\, l$$

$$\Rightarrow \quad Q = \pi R^2\, l\, q_v \quad [W] \tag{9.158}$$

9.4. Conduction thermique à travers les surfaces nervurées

L'augmentation de la surface d'échange de chaleur constitue une méthode d'intensification du transfert thermique très usitée, notamment dans le cas des gaz, qui sont caractérisés par des coefficients convectifs très faibles. De même, lorsque la différence de température est fixe, la seule modalité d'augmenter le flux de chaleur est d'augmenter la surface d'échange de chaleur, opération qui se réalise par nervurage (nervures ou aillettes de diverses formes géométriques - longitudinales, radiales, aciculaires etc.).

Nous allons analyser seulement *la nervure rectangulaire de section constante*.

Soit une paroi plane munie de nervures rectangulaires. La face nervurée de la paroi échange de la chaleur par convection avec un fluide.

Hypothèses de calcul:

- ♦ le régime thermique est stationnaire
- ♦ la conductivité du matériau de la paroi (le même que le matériau de la nervure) est constante
- ♦ la température du fluide est constante
- ♦ le coefficient convectif α est constant le long de la nervure
- ♦ le coefficient convectif α_l $(\alpha \neq \alpha_1)$ au bout de la nervure (sur la face frontale de celle-ci) est constant
- ♦ le contact entre la paroi et la nervure est parfait D la température de la base de la nervure est égale à la température de la surface de la paroi ($t_b = t_0$)
- ♦ l'épaisseur de l'aillette est petite

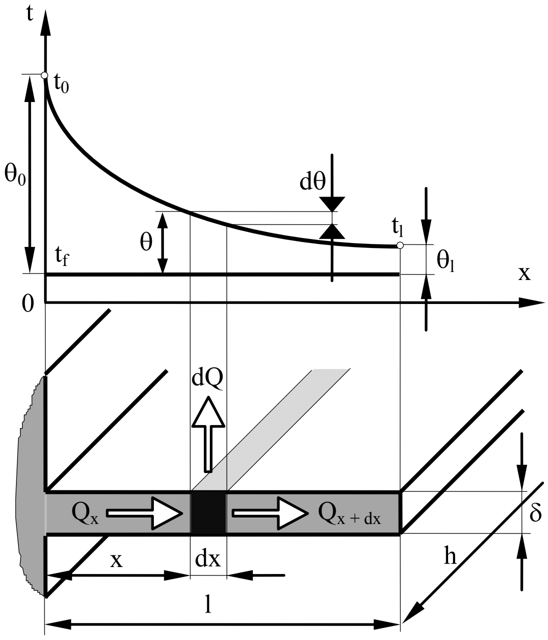


Fig. 9.17.

par rapport à sa hauteur D le transfert de chaleur dans la nervure est unidimensionnel

Pour des raisons de simplicité, on prend la température du fluide (t_f) pour température de référence et par conséquent, la variable devient $\theta = t - t_f$ (voir Fig. 9.17.).

A la distance x mesurée par rapport à la base de la nervure, par la section transversale (dont l'aire est désignée par S) entre la quantité de chaleur Q_x. Une partie de cette chaleur (dQ) est transmise par convection au fluide; l'autre partie (désignée par Q_{x+dx}) sort par la section opposée, située à la distance x + dx. Par conséquent, le bilan thermique pour le volume élémentaire $dV = S \cdot dx$ s'écrit:

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ \qquad (9.159)$$

La loi de Fourier, appliquée aux quantités de chaleur Q_x et Q_{x+dx} donne:

$$Q_x = -\lambda S \frac{d\theta}{dx} \qquad (9.160)$$

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx = -\lambda S \frac{d\theta}{dx} - \lambda S \frac{d^2\theta}{dx^2} dx \qquad (9.161)$$

La quantité de chaleur dQ échangée par convection entre la bande de surface Pdx (P - périmètre de la nervure) et le fluide s'écrit en appliquant la loi de Newton:

$$dQ = \alpha P dx \theta \qquad (9.162)$$

En portant les relations (9.160) - (9.162) dans (9.159), après les réductions nécessaires on obtient:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda S}\theta = 0 \qquad (9.163)$$

On désigne par m **le chiffre caractéristique de la nervure**, défini par:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}} \quad \left[m^{-1}\right] \qquad (9.164)$$

Par conséquent, l'équation différentielle du transfert de chaleur devient:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0} \qquad (9.165)$$

La solution générale de l'équation (9.165) est:

$$\boxed{\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}} \qquad (9.166)$$

La dérivée $\frac{d\theta}{dx}$ (dont nous aurons besoin plus loin), est:

$$\frac{d\theta}{dx} = m\left(C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx}\right) \qquad (9.167)$$

On calcule la solution particulière en trois cas: *le cas général*, *le cas simplifié* où on néglige le flux de chaleur transmis par le bout de la nervure et l'approximation dite *de Harper-Brown*.

9.4.1. Cas général

a. *Equation du champ de température*

Les conditions aux limites sont dans ce cas:

- à la base de la nervure (x = 0), la différence de température θ égale θ_0:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 \qquad (\&\ )$$

- au bout de la nervure (x = l):

  - le flux conductif qui passe par la surface frontale, égale le flux convectif transmis au fluide:

  $$x = l \quad \Rightarrow \quad -\lambda\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=l} = \alpha_l\theta_l \qquad (\&\ \&\ )$$

  (α_l désigne le coefficient convectif au bout de la nervure, généralement différent du coefficient convectif α entre la surface latérale de celle-ci et le fluide)

  - la différence de température égale θ_l:

  $$x = l \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_l$$

(& & &)

Compte tenu de (9.166) et de (9.167), il résulte un système de trois équations dont les inconnues sont C_1, C_2 et θ_l :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_0 \\ -\lambda m\left(C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}\right) = \alpha_l\theta_l \\ C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml} = \theta_l \end{cases}$$

En remplaçant dans les premières deux équations la différence de température θ_l donnée par la troisième, on obtient un nouveau système constitué de deux équations, dont les inconnues sont C_1 et C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_0 \\ C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml} = -\dfrac{\alpha_l}{\lambda m}\left(C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml}\right) \end{cases} \qquad (9.168)$$

En appliquant la règle de Cramer, on trouve:

$$C_1 = \theta_0 \frac{\left(1 - \frac{\alpha_l}{\lambda m}\right) e^{-ml}}{\left(1 + \frac{\alpha_l}{\lambda m}\right) e^{ml} + \left(1 - \frac{\alpha_l}{\lambda m}\right) e^{-ml}} \qquad (9.169)$$

$$C_2 = \theta_0 \frac{\left(1 + \frac{\alpha_l}{\lambda m}\right) e^{ml}}{\left(1 + \frac{\alpha_l}{\lambda m}\right) e^{ml} + \left(1 - \frac{\alpha_l}{\lambda m}\right) e^{-ml}} \qquad (9.170)$$

Par conséquent, la solution particulière (9.166) devient:

$$\theta = \theta_0 \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)} + \frac{\alpha_l}{\lambda m}\left[e^{m(l-x)} - e^{-m(l-x)}\right]}{e^{ml} + e^{-ml} + \frac{\alpha_l}{\lambda m}\left(e^{ml} - e^{-ml}\right)} \qquad (9.171)$$

Compte tenu des expressions des fonctions hyperboliques:

$$\operatorname{sh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{ch} y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

on écrit l'équation (9.171) sous la forme suivante:

$$\boxed{\theta = \theta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(l-x)] + \frac{\alpha_l}{\lambda m} \cdot \operatorname{sh}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml) + \frac{\alpha_l}{\lambda m} \cdot \operatorname{sh}(ml)} = \theta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(l-x)]}{\operatorname{ch}(ml)} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha_l}{\lambda m} \cdot \operatorname{th}[m(l-x)]}{1 + \frac{\alpha_l}{\lambda m} \cdot \operatorname{th}(ml)}} \qquad (9.172)$$

En posant x = l, on obtient l'expression de θ_l:

$$\theta_l = \frac{\theta_0}{\operatorname{ch}(ml) + \frac{\alpha_l}{\lambda m} \cdot \operatorname{sh}(ml)} \qquad (9.173)$$

b. *Le flux thermique échangé*

Puisque dans la section correspondant à la base de la nervure le transfert de chaleur est exclusivement conductif, il est rationnel de calculer le flux thermique en cette section.

Par conséquent:

$$Q = -\lambda S\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} \tag{9.174}$$

En posant x = 0 dans (9.167) et compte tenu de (9.169) et (9.170), on obtient successivement:

$$Q = \lambda Sm\left(C_2 - C_1\right) = \lambda Sm\theta_0 \frac{\left(1+\frac{\alpha_1}{\lambda m}\right)e^{ml} - \left(1-\frac{\alpha_1}{\lambda m}\right)e^{-ml}}{2ch\left(ml\right) + 2\frac{\alpha_1}{\lambda m}\cdot sh\left(ml\right)} = \lambda Sm\theta_0 \cdot \frac{th\left(ml\right) + \frac{\alpha_1}{\lambda m}}{1 + \frac{\alpha_1}{\lambda m}\cdot th\left(ml\right)}$$

En tenant compte que S = hδ, on trouve finalement:

$$\boxed{Q = \lambda\, h\, \delta\, m\, \theta_0 \cdot \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda m} + th\left(ml\right)}{1 + \frac{\alpha_1}{\lambda m}\cdot th\left(ml\right)}} \tag{9.175}$$

c. _Rendement de la nervure_

Le rendement de la nervure *η* est un indice de performance, défini par le rapport du flux effectif échangé Q_{ef}, au flux maximal, Q_{max}:

$$\eta = \frac{Q_{ef}}{Q_{max}} \tag{9.176}$$

Le flux maximal représente le flux thermique que la nervure aurait échangé si elle était isotherme à la température t_0. Une telle situation correspond au cas de la nervure avec conductivité infinie (λ D T), c'est à dire au cas où la différence de température le long de la nervure est constante et maximale (θ = θ_0).

Le flux maximal comporte deux composantes:

- le flux échangé par la surface latérale de la nervure: $\alpha\, P l \theta_0$
- le flux échangé par la surface frontale (le bout de la nervure): $\alpha_1\, h\delta\theta_0$

Donc:

$$Q_{max} = \left(\alpha\, P l + \alpha_1\, h\delta\right)\theta_0 \tag{9.177}$$

Compte tenu de (9.175), le rendement devient:

$$\eta = \frac{\lambda\, h\delta\, m\theta_0}{\left(\alpha\, P l + \alpha_1\, h\delta\right)\theta_0}\cdot\frac{\frac{\alpha_1}{\lambda m} + th\left(ml\right)}{1 + \frac{\alpha_1}{\lambda m}\cdot th\left(ml\right)}$$

Après quelques réductions, on obtient la relation mathématique du rendement:

$$\eta = \frac{1}{ml + \frac{\alpha_1}{\lambda m}} \cdot \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda m} + th(ml)}{1 + \frac{\alpha_1}{\lambda m} \cdot th(ml)} \tag{9.178}$$

9.4.2. Cas particulier où on néglige le flux échangé par la surface frontale

Ce cas dérive du cas général, en posant $\alpha_l = 0$ (c'est à dire que l'échange thermique est absent au bout de la nervure).

Par conséquent, on obtient les relations suivantes:

$$\theta = \theta_0 \frac{ch[m(l - x)]}{ch(ml)} \tag{9.179}$$

$$Q = \lambda\, h\, \delta\, m\, \theta_0\, th(ml) \tag{9.180}$$

$$\eta = \frac{th(ml)}{ml} \tag{9.181}$$

9.4.3. Approximation de Harper-Brown

En ce cas, on tient compte de la chaleur échangée par la surface frontale de la nervure, en considérant une nervure fictive plus longue que la nervure initiale, mais n'échangeant pas de la chaleur par son bout. L'aire supplémentaire qui résulte en prolongeant la nervure initiale, remplace du point de vue du transfert de chaleur l'effet produit par le bout de la nervure: la chaleur que la surface frontale de la nervure initiale aurait échangé, égale la chaleur échangée par l'aire supplémentaire introduite.

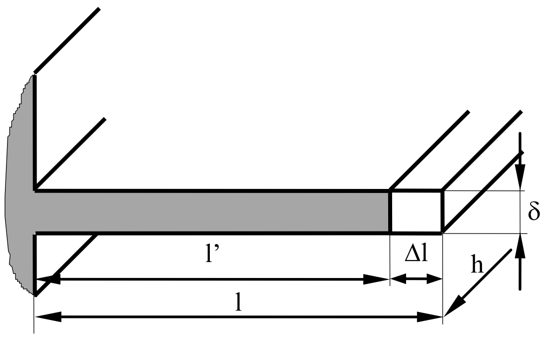


Fig. 9.18.

En désignant par Δl la longueur supplémentaire (voir Fig. 9.18), on écrit l'égalité des deux flux de chaleur:

$$\alpha \delta h \theta_1 = \alpha P \Delta l \theta_1 \tag{9.182}$$

Puisque $\delta << h$, le périmètre $P = 2(\delta + h)$ peut être écrit: P ¾ 2h et par conséquent:

$$\boxed{\Delta l = \frac{\delta}{2}} \qquad (9.183)$$

Le traitement du problème est désormais identique à celui du cas simplifié précédent. La seule différence est que la longueur initiale *l* est remplacée par la longueur majorée $l' = l + \Delta l = l + \frac{\delta}{2}$

9.4.4. Calcul du transfert de chaleur à travers les parois nérvurées

Soient deux fluides dont les températures sont connues ($t_{f1} > t_{f2}$) échangeant de la chaleur à travers une paroi nervurée (voir Fig. 9.19.). On désigne par S_1 la surface lisse de la paroi, par S_n la surface totale des nervures et par S' la surface de la paroi comprise entre les nervures (surface non-nervurée). La surface totale du côté nervuré de la paroi est $S_t = S' + S_n$. Les coefficients convectifs (connus) sont: α_1 - du côté du fluide chaud, α' - correspondant à la surface non-nervurée et α - correspondant aux nervures.

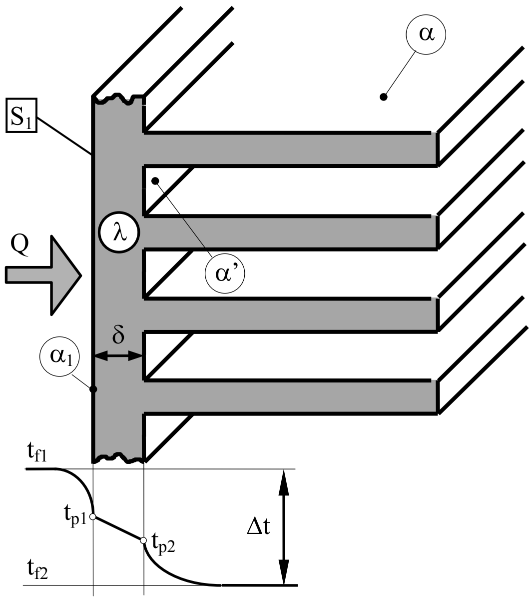


Fig. 9.19.

Le flux de chaleur *Q* échangé par la surface nervurée de la paroi comporte deux composantes:

– la chaleur Q_0 échangée par les nervures:

$$Q_0 = \eta Q_{max} = \eta \alpha S_n \theta_0 \qquad (9.184)$$

– la chaleur *Q*' échangée par la surface *S*' comprise entre les nervures:

$$Q' = \alpha' S' \theta_0 \qquad (9.185)$$

Par conséquent:

$$Q = Q_0 + Q' = \left(\eta \alpha S_n + \alpha' S'\right)\theta_0 \qquad (9.186)$$

En désignant par α_{eq} **le coefficient équivalent** de la face nervurée, on peut écrire également:

$$Q = Q_0 + Q' = \left(\eta \alpha S_n + \alpha' S'\right)\theta_0 = \alpha_{eq} S_t \theta_0$$

L $$\boxed{\alpha_{eq} = \eta\alpha\frac{S_n}{S_t} + \alpha'\frac{S'}{S_t}} \quad \left[\frac{W}{m^2K}\right] \tag{9.187}$$

On écrit maintenant les expressions du flux thermique *Q* dans les trois régions du système:

- fluide chaud - paroi: $Q = \alpha_1 S_1 \left(t_{f1} - t_{p1}\right)$
- paroi: $Q = \frac{\lambda}{\delta} S_1 \left(t_{p1} - t_{p2}\right)$
- paroi - fluide froid: $Q = \alpha_{eq} S_t \left(t_{p2} - t_{f2}\right)$

En éliminant les températures intermédiaires t_{p1} et t_{p2} (inconnues à présent), on trouve:

$$\boxed{Q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{\delta}{\lambda}\frac{1}{S_1} + \frac{1}{\alpha_{eq} S_t}}} \quad [W] \tag{9.188}$$

On calcule le coefficient global de transfert k_s en considérant deux cas:

a) k_{s1} - lorsqu'on choisit *la surface intérieure* S_1 de la paroi pour surface de référence:

$$Q = k_{s1} S_1 \left(t_{f1} - t_{f2}\right) \tag{9.189}$$

$$k_{s1} = \frac{Q}{S_1\left(t_{f1} - t_{f2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{eq}}\frac{S_1}{S_t}} \quad \left[\frac{W}{m^2K}\right] \tag{9.190}$$

b) k_{s2} - lorsqu'on choisit pour surface de référence *la surface totale* S_t de la face nervurée:

$$Q = k_{s2} S_t \left(t_{f1} - t_{f2}\right) \tag{9.191}$$

$$k_{s2} = \frac{Q}{S_t\left(t_{f1} - t_{f2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}\frac{S_t}{S_1} + \frac{\delta}{\lambda}\frac{S_t}{S_1} + \frac{1}{\alpha_{eq}}} \quad \left[\frac{W}{m^2K}\right] \tag{9.192}$$

Les températures de la paroi:

$$t_{p1} = t_{f1} - \frac{Q}{S_1}\frac{1}{\alpha_1} \tag{9.193}$$

$$t_{p2} = t_{f2} + \frac{Q}{S_t}\frac{1}{\alpha_{eq}} \tag{9.194}$$

QUESTIONS

1. La conduction thermique aussi bien que la propagation des ondes impliquent un transfert d'énergie. Y a-t-il une difference fondamentale entre ces deux phénomènes?

2. Deux corps, l'un en bois, l'autre en métal, ont la même température. Si les deux corps sont froids, nous sentons le métal comme plus froid que le bois; si les deux corps sont plus chauds, le métal paraît plus chaud que le bois. Expliquez. A quelle température les sensations sont les mêmes?

3. En hiver, la température de la surface intérieure d'une paroi est inférieure à la température de l'air intérieur et la température de la surface extérieure est supérieure à la température de l'air extérieur. Expliquez.

4. Quelles sont les conditions que vous imposeriez pour la conductivité thermique, la capacité calorifique et le coefficient dilatation du matériau d'un récipient de cuisine?

5. En quelle manière un transfert stationnaire de chaleur est analogue à l'écoulement d'un fluide incompressible?

6. Deux parois opposées d'un récipient contenant un gaz sont maintenues à des températures différentes. Décrire le mécanisme de conduction thermique dans le gaz.

7. Les métaux sont caractérisés par des conductivités thermique et électrique très élevées. C'est une coïncidence? Sinon, expliquez.

8. En quelles conditions le transfert de chaleur à travers un fluide (liquide ou gaz) est purement conductif? Donnez un exemple.

10. Transfert De Chaleur Par Convection

10.1. Généralités

Le terme “convection” désigne un processus d’échange de chaleur provoqué par le mouvement du milieu fluide de transfert (liquide ou gaz). La chaleur est échangée par conduction et ensuite elle est effectivement transportée par les volumes de fluide en mouvement. Les processus physiques caractérisant un tel mode de transfert sont très complexes et de plus, il y a généralement plusieurs phénomènes différents se manifestant simultanément.

Considérons à titre d’exemple un processus de transfert de chaleur par convection entre une paroi verticale chaude et un fluide. On peut schématiser les phénomènes et les régions du processus dans le tableau suivant:

Région	Phénomènes
de contact paroi - fluide	♦ échauffement par conduction de la couche de fluide en contact avec la paroi ♦ accumulation de l’énergie thermique dans la masse de la couche D augmentation de la température ♦ diminution de la densité de la couche par suite de l’échauffement ♦ apparition des forces archimédiques (ascensionnelles) causées par les différences de densité entre les régions du fluide ayant des températures différentes
du fluide en mouvement	♦ transfert de substance: les forces ascensionnelles provoquent une circulation du fluide: les régions froides, plus lourdes, remplacent les zones de fluide chaudes, plus légères ♦ transport de l’énergie thermique emmagasinée, déterminé par le transfert de substance
de contact fluide - fluide	♦ transfert de chaleur – par conduction et diffusion moléculaire entre les zones de fluide ayant des températures différentes – par mélange des régions de fluide dont les températures sont différentes

Les causes déterminantes du mouvement du fluide sont des **causes internes**, générées par le processus lui-même et des **causes externes**, provenant de l'extérieur.

– Les causes internes. Toute modification d'une propriété physique du fluide causée par une différence de température (donc par un échange de chaleur) et qui provoque le mouvement du celui-ci constitue une cause interne. La plus fréquente cause interne est la variation de densité.

  L'intensité du mouvement est dictée par la valeur du flux thermique échangé.

  Le mouvement du fluide est dit **libre** et le phénomène correspondant est appelé **convection libre** ou **naturelle**.

– Les causes externes sont constituées des actions mécaniques provenant de l'extérieur, dont l'effet est le mouvement du fluide. En ce cas, l'intensité de celui-ci dépend seulement de l'action extérieure.

  Le flux de chaleur échangé n'influence pas l'intensité du mouvement.

  Par conséquent, le mouvement du fluide se produit même en l'absence du transfert de chaleur. La convection est dite **forcée**.

10.1.1. Loi de Newton

L'évaluation quantitative d'un transfert de chaleur convectif est donnée par **la loi de Newton**:

Le flux de chaleur échangé entre un corps de surface *S* et un fluide, est proportionnel à la différence de température entre le corps et le fluide.

$$\boxed{Q = \alpha S\left|t_p - t_f\right| = \alpha S \Delta t} \quad [W] \qquad (10.1)$$

ou:

$$\boxed{q_s = \frac{Q}{S} = \alpha\left|t_p - t_f\right| = \alpha \Delta t} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad (10.2)$$

Dans les relations ci-dessus, on a considéré la valeur absolue de la différence des températures t_p du corps (paroi) et t_f du fluide afin d'obtenir toujours une valeur positive de flux thermique (le signe du celui-ci n'importe pas dans notre analyse).

Le facteur de proportionnalité α désigne **le coefficient de transfert** (dit aussi **coefficient convectif de transfert**), dont la signification physique représente le flux thermique échangé par une surface unitaire sous une différence de température unitaire:

$$\boxed{\alpha = \frac{Q}{S\Delta t}} \quad \left[\frac{W}{m^2 K}\right] \tag{10.3}$$

Le coefficient de transfert réfléchit (par l'intermédiaire des facteurs déterminant sa valeur) la grande complexité du phénomène convectif:

- la géométrie du système convectif (forme et dimensions, disposition des surfaces etc.)
- les causes déterminantes du mouvement du fluide
- la vitesse du fluide
- le régime d'écoulement
- les températures t_p et t_f
- les propriétés physiques du fluide (λ_f, ρ_f, c_{pf}, η_f, a_f)

En conséquence, il est impossible de déduire une relation mathématique générale englobant les influences exercées par tous ces facteurs. La valeur du coefficient de transfert se calcule par des méthodes spécifiques développées pour des classes de phénomènes convectifs semblables. La détermination de ce coefficient constitue le problème principal à résoudre lorsqu'on analyse un échange convectif de chaleur.

Puisque le phénomène convectif est inséparablement lié au mouvement du milieu de transfert (le fluide), il est absolument nécessaire de présenter quelques notions élémentaires de mécanique des fluides.

10.1.2. Viscosité

Dans le cas d'un fluide en repos, les seules forces s'exerçant sur un plan quelconque placé dans le fluide, sont des forces normales au plan, dites **forces de pression**, définies par le principe de Pascal. Lorsque le fluide est en mouvement, les déplacements relatifs des couches de fluide produisent des contraintes tangentielles (de cisaillement), dues aux forces de cohésion s'exerçant entre les particules de fluide: D celui-ci s'oppose aux déformations. Le résultat de cette opposition est l'apparition des forces internes de frottement, dites **forces de viscosité**, qui freinent les mouvements relatifs, en dissipant sous forme de chaleur une partie de l'énergie de l'écoulement. L'intensité des forces de frottement visqueux est évaluée par l'intermédiaire de la relation de Newton (voir aussi Fig. 10.1.). Soient deux couches de fluide dont les vitesses sont w et $w + \mathrm{d}w$. En désignant par $\mathrm{d}n$ la distance entre les couches, mesurée le long de la normale commune n correspondant à la surface de séparation $\mathrm{d}S$, la relation de Newton décrit du point de vue mathématique l'énoncé:

> La force élémentaire de frottement visqueux $\mathrm{d}F_f$ s'exerçant dans le plan de la surface de séparation $\mathrm{d}S$, est proportionnelle au gradient de vitesse normal à la surface $\mathrm{d}S$.

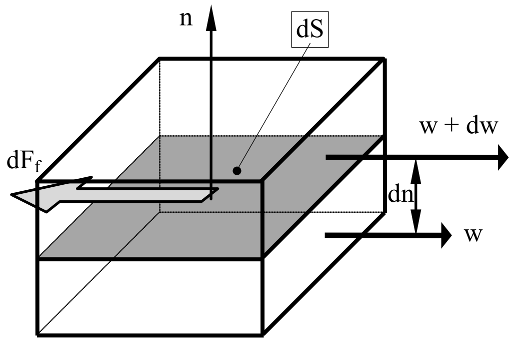


Fig. 10.1.

$$dF_f = -\eta dS \frac{dw}{dn} \quad [N] \tag{10.4}$$

En divisant la force de frottement par la surface d*S*, on obtient **la contrainte tangentielle** τ_f:

$$\tau_f = \frac{dF_f}{dS} = -\eta \frac{dw}{dn} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{10.5}$$

Le facteur de proportionnalité η désigne **la viscosité dynamique**, représentant la contrainte tangentielle produite sous un gradient de vitesse unitaire:

$$\eta = \frac{|\tau_f|}{\frac{dw}{dn}} \quad \left[\frac{Ns}{m^2}\right] \tag{10.6}$$

Le signe "moins" dans les relations (10.4) et (10.5) signifie que le sens des forces de viscosité est opposé au sens de la vitesse.

On utilise aussi **le coefficient de viscosité cinématique** (ν):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \left[\frac{m^2}{s}\right] \tag{10.7}$$

(ρ - densité du fluide).

On peut écrire une forme générale de la relation de Newton:

$$d\vec{F}_f = -\eta dS \frac{d\vec{w}}{dn} = -\eta dS\left(\frac{dw_x}{dx}\vec{i} + \frac{dw_y}{dy}\vec{j} + \frac{dw_z}{dz}\vec{k}\right) = -dS\left(\tau_x \vec{i} + \tau_y \vec{j} + \tau_z \vec{k}\right) =$$

$$= dF_{f,x}\vec{i} + dF_{f,y}\vec{j} + dF_{f,z}\vec{k} \tag{10.8}$$

10.1.3. Régime d'écoulement

A. Ecoulement laminaire

Un écoulement est dit **laminaire**, lorsque les couches de fluide se déplacent parallèlement, n'existant pas des composantes transversales (par rapport à la direction de l'écoulement) de la vitesse des particules de fluide.

En cas d'un écoulement laminaire dans une conduite de section circulaire, la distribution des vitesses obéit à une loi parabolique (voir Fig. 10.2.), la vitesse maximale est atteinte sur l'axe de la conduite et la vitesse moyenne $\overline{w}$ égale la moitié de la valeur maximale ($\overline{w}$ = 0,5 w_{max}).

Lorsque le fluide échange de la chaleur par l'intermédiaire de la paroi de la conduite, l'échange est **exclusivement conductif** puisque le mouvement des particules de fluide seulement dans la direction de l'écoulement interdit tout transfert de substance suivant les directions transversales et implicitement tout échange convectif.

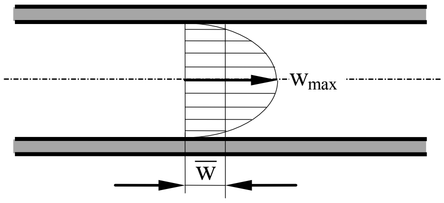


Fig. 10.2.

B. Ecoulement turbulent

Lorsque la vitesse du fluide dépasse une certaine valeur, l'écoulement perd progressivement son caractère laminaire car le mouvement des particules devient de plus en plus désordonné. Au déplacement dans la direction de l'écoulement se superposent des mouvements aléatoires (chaotiques) suivant des directions transversales. La vitesse des particules présente des composantes dans un plan normal à la direction de l'écoulement, dont la direction et l'intensité varient continuellement, dites **pulsations de vitesse**. L'écoulement est dit **turbulent**.

Le profil des vitesses en cas d'un écoulement turbulent dans une conduite circulaire est aplati par rapport au profil laminaire (voir Fig. 10.3.). La vitesse moyenne est dans ce cas égale à 0,84 w_{max}.

A cause des déplacements transversaux des particules, le mécanisme du transfert de chaleur paroi-fluide est **convectif**.

L'écoulement turbulent est très compliqué; une description mathématique étant impossible, seules les valeurs moyennes des paramètres du fluide peuvent être évaluées. Les résistances à l'écoulement sont fortement augmentées par la turbulence, ce qui équivaut à une croissance de 100 - 1000 fois de la viscosité du fluide. Par conséquent, les pertes d'énergie deviennent importantes dans le cas d'un tel écoulement.

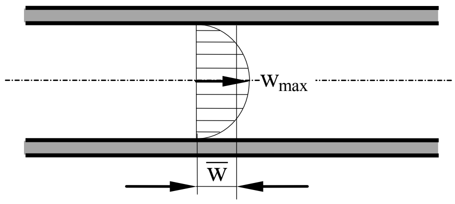


Fig. 10.3.

Remarques

1. Il existe un régime de transition entre le régime laminaire et l'écoulement turbulent, caractérisé par l'alternance des portions d'écoulement laminaire et turbulent.
2. Le régime d'écoulement est caractérisé par **le nombre de Reynolds (Re)**, défini par la relation:

$$\boxed{Re = \frac{\overline{w}l}{\nu} = \frac{\rho\overline{w}l}{\eta}}$$

où: l -longueur de référence
$\overline{w}$ -vitesse moyenne
ν -viscosité cinématique
η -viscosité dynamique

10.1.4. Couche-limite

Le concept de couche-limite a été introduit par L. Prandtl[1] en 1904. La couche-limite est la région dans le fluide en contact avec la paroi dans laquelle se manifeste l'influence de la viscosité sur le caractère de l'écoulement et implicitement sur le type de transfert de chaleur paroi-fluide.

A. Couche-limite laminaire

Considérons, à titre d'exemple, l'écoulement laminaire d'un fluide le long d'une plaque plane (voir Fig. 10.4.).

Les particules de fluide en contact avec la plaque sont immobilisées par les forces d'adhésion par rapport au matériau de celle-ci. Par conséquent, la première couche de particules est en repos. La couche de particules suivante est freinée dans son mouvement par les forces de cohésion exercées par la première couche. La deuxième couche freine à son tour la couche suivante et ainsi de suite. Cet effet de freinage de proche en proche produit un ralentissement de l'écoulement, d'autant plus intense que la couche est plus rapprochée par rapport à la paroi. Par conséquent, il apparaît une variation de la vitesse des particules de fluide suivant la direction *Oy*, normale à la direction de l'écoulement, dont le résultat est un gradient normal de vitesse.

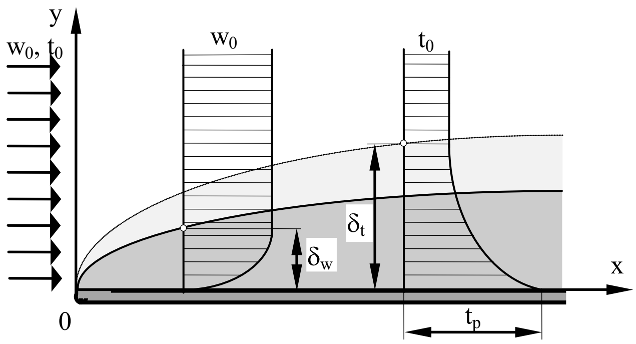


Fig. 10.4.

Cette zone, dont l'épaisseur δ_w augmente au fur et à mesure que le fluide avance le long de la plaque, est dite **couche-limite hydrodynamique**.

Par conséquent, **la couche-limite hydrodynamique représente la région de fluide adjacente à la paroi dans laquelle la vitesse de celui-ci varie de 0 à w_0**.

[1] **Prandtl L**. (1875 - 1953): physicien allemand, auteur de travaux sur la mécanique des fluides.

La couche-limite divise le domaine du fluide en deux régions:

- **une couche mince** adjacente à la paroi dans laquelle le gradient de vitesse et les forces de frottement visqueux sont grandes
- **une région extérieure** où la vitesse est pratiquement égale à la vitesse de l'écoulement libre et les effets de la viscosité sont négligeables

On définit d'une manière similaire la couche-limite thermique, dont l'épaisseur est δ_t.

B. Couche-limite turbulente

Lorsque la vitesse du fluide dépasse une certaine limite, l'écoulement devient turbulent.

On définit **la couche-limite turbulente comme la région dans laquelle la vitesse du fluide croît de 0 à w_0** (voir Fig. 10.5.).

La région O - A correspond au régime laminaire (*A* - point de transition). Au delà du point *A* l'écoulement est turbulent (en réalité, il existe une zone de transition caractérisée par un écoulement hybride laminaire-turbulent - pour des raisons de simplicité on a remplacé cette zone par un point conventionnel de transition).

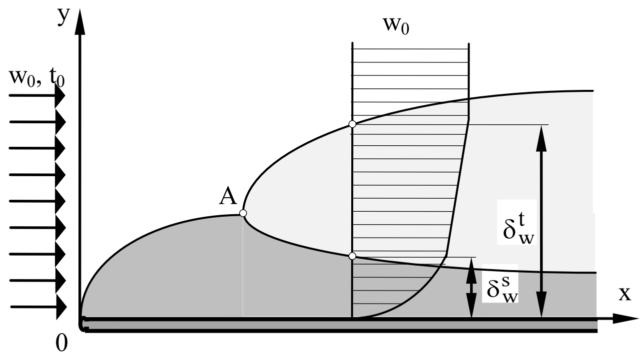


Fig. 10.5.

La zone de l'écoulement turbulent présente une structure complexe, constituée par deux régions distinctes:

- **la région de la couche-limite laminaire secondaire** (épaisseur δ_w^s). Cette couche-limite garde le caractère laminaire de l'écoulement sur toute la longueur de la plaque. L'épaisseur de la couche-limite laminaire secondaire est constante.
- **la région de transition (zone-tampon)**, située au-dessus de la couche-limite laminaire secondaire.

Au dessus de la couche-limite turbulente (épaisseur δ_w^t) se situe **la zone de l'écoulement libre**, où le fluide n'est pas influencé par la paroi.

10.2. Equations fondamentales du transfert de chaleur convectif

A cause de la complexité du phénomène convectif, il est nécessaire de déduire plusieurs équations dont le rôle est de décrire du point de vue mathématique l'écoulement combiné avec l'échange de chaleur proprement dit.

Les quatre équations fondamentales du transfert de chaleur convectif sont:

- l'équation de continuité
- l'équation de l'énergie
- l'équation de l'écoulement laminaire du fluide visqueux
- l'équation d'échange de chaleur

10.2.1. Equation de continuité

Considérons l'écoulement instationnaire[1] d'un fluide incompressible.

Soit un volume élémentaire dV = dx dy dz (voir Fig. 10.6.). La quantité de substance dm_x entrant dans le volume élémentaire par la face gauche (dont l'aire est dS_x) durant le temps élémentaire $d\tau$ est:

$$dm_x = \rho w_x dS_x d\tau = \rho w_x dydzd\tau \tag{10.9}$$

(ρ désigne le densité et w_x la composante de la vitesse suivant la direction de l'axe Ox).

La masse dm_{x+dx} sortant du volume élémentaire considéré par la face opposée dans le même intervalle de temps est:

$$dm_{x+dx} = dm_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx = dm_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x)dxdydzd\tau = dm_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x)dVd\tau \tag{10.10}$$

La quantité de substance $dm_{em,x}$ emmagasinée dans l'intervalle $d\tau$ dans le volume élémentaire considéré à cause du régime instationnaire d'écoulement, représente la différence des quantités précédentes:

$$dm_{em,x} = dm_x - dm_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x)dVd\tau \tag{10.11}$$

En additionnant les quantités emmagasinées suivant les trois directions, on obtient la masse totale emmagasinée dm_{em} :

$$dm_{em} = dm_{em,x} + dm_{em,y} + dm_{em,z} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z)\right]dVd\tau \tag{10.12}$$

[1] Un écoulement est dit *instationnaire*, lorsque la vitesse et les paramètres du fluide (densité, pression, température etc.) en un point considéré sont dépendants du temps et *stationnaire* lorsque ceux-ci sont indépendants du temps.

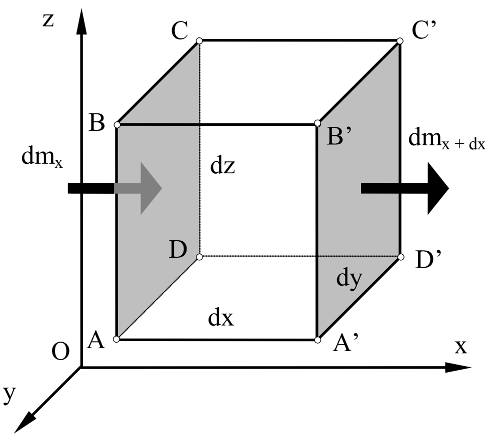


Fig. 10.6.

On désigne par $\frac{\partial \rho}{\partial \tau}$ **la vitesse de variation de la densité** dans le point considéré. En la multipliant par $d\tau$, on obtient la variation de la densité du fluide correspondant à l'intervalle de temps respectif. Puisque l'emmagasinage de substance dans le volume élémentaire est causé par cette variation de densité, on écrit la masse accumulée dm_{em} comme il suit:

$$dm_{em} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV d\tau \tag{10.13}$$

En égalant (10.12) et (10.13) et en opérant les réductions qui s'imposent, on trouve l'expression de l'équation de continuité:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) = 0} \tag{10.14}$$

Cas particuliers:

– régime stationnaire ($\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$), fluide compressible ($\frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial \rho}{\partial y} \neq 0, \frac{\partial \rho}{\partial z} \neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) = 0 \tag{10.15}$$

– régime stationnaire ($\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$), fluide incompressible ($\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$)

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \tag{10.16}$$

ou:

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \tag{10.17}$$

10.2.2. Equation de l'énergie

En cas d'un fluide immobile sans sources internes cette équation a pour expression particulière l'équation de Fourier:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \qquad (10.18)$$

(rappelons que le membre droit de l'équation ci-dessus représente le terme correspondant à la quantité de chaleur dQ_{cond} - voir aussi § 9.2.).

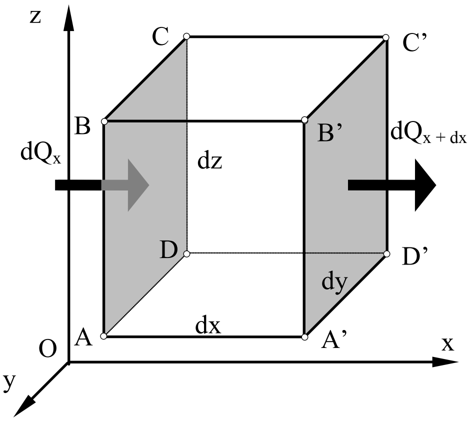


Fig. 10.7.

En cas d'un fluide en écoulement, lorsqu'on écrit le bilan thermique du volume élémentaire dV = dx dy dz, on doit tenir compte aussi de la quantité de chaleur dQ_{conv} transportée à travers celui-ci par convection. Il résulte que, conformément au bilan thermique, la quantité de chaleur dQ emmagasinée dans le volume élémentaire dV pendant l'intervalle de temps dτ a deux composantes: dQ_{cond} et dQ_{conv} :

$$dQ = dQ_{cond} + dQ_{conv} \qquad (10.19)$$

Dans le but de calculer dQ_{conv} , on considère le volume élémentaire dV (voir Fig. 10.7.), auquel on applique le bilan des quantités de chaleur le traversant par convection.

La vitesse w du fluide a pour composantes w_x, w_y et w_z. On suppose que le processus est isobare.

Il suffit de considérer seulement le transfert de chaleur suivant une direction (par exemple Ox).

En supposant que le processus est isobare, la quantité de chaleur dQ_x entrant par la face gauche du volume élémentaire représente l'énergie thermique transportée par le flux de substance suivant la direction Ox. Par conséquent (voir le premier principe), cette énergie constitue l'enthalpie:

$$dQ_x = h\,dm = h\frac{dm}{d\tau}d\tau = \dot{m}\,h\,d\tau = \rho\frac{dV}{d\tau}c_p\,t\,d\tau = \rho\frac{dxdydz}{d\tau}c_p\,t\,d\tau \qquad (10.20)$$

Dans la suite d'égalités ci-dessus, $\dot{m}$ désigne le débit massique ($\dot{m} = \frac{dm}{d\tau} = \rho\frac{dV}{d\tau}\left[\frac{kg}{s}\right]$), $\frac{dV}{d\tau}\left[\frac{m^3}{s}\right]$ désigne le débit volumique et ρ représente la densité. Compte tenu que $\frac{dx}{d\tau} = w_x$, on trouve:

$$dQ_x = \rho c_p t\, w_x dydzd\tau \qquad (10.21)$$

Dans le même intervalle de temps, par la face opposée sort la quantité de chaleur:

$$dQ_{x+x} = dQ_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho c_p w_x t\, dydzd\tau\right)dx = dQ_x + \rho c_p\, dydz\frac{\partial}{\partial x}\left(w_x t\right)dxd\tau =$$

$$= dQ_x + \rho c_p \frac{\partial}{\partial x}\left(w_x t\right)dxdydzd\tau$$

$$\Rightarrow dQ_{x+x} = dQ_x + \rho c_p\left(t\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x\frac{\partial t}{\partial x}\right)dVd\tau \qquad (10.22)$$

La composante convective d$Q_{conv,x}$ accumulée dans le volume élémentaire représente la différence des quantités précédentes:

$$dQ_{conv,x} = dQ_x - dQ_{x+x} = -\rho c_p\left(t\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x\frac{\partial t}{\partial x}\right)dVd\tau \qquad (10.23)$$

Par conséquent, la quantité de chaleur dQ_{conv} accumulée par convection durant l'intervalle dτ est:

$$dQ_{conv} = dQ_{conv,x} + dQ_{conv,y} + dQ_{conv,z} =$$

$$= -\rho c_p\left[w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z} + t\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)\right]dVd\tau$$

En supposant que le fluide est incompressible et que l'écoulement est stationnaire, compte tenu de (10.16), on obtient:

$$dQ_{conv} = -\rho c_p\left(w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)dVd\tau \qquad (10.24)$$

Si l'on tient compte des relations (9.15) et (9.18), l'équation de bilan (10.19) devient:

$$\rho\, c_p\frac{\partial t}{\partial \tau}dVd\tau = \lambda\nabla^2 t\, dVd\tau - \rho c_p\left(w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)dVd\tau \qquad (10.25)$$

En opérant les réductions nécessaires, on trouve la forme finale de **l'équation de l'énergie, appliquée à l'écoulement stationnaire du fluide incompressible**:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z} = a\nabla^2 t} \qquad (10.26)$$

Lorsque **le régime thermique est stationnaire** ($\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$), l'équation devient:

$$w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z} = a\nabla^2 t \qquad (10.27)$$

c'est à dire que la chaleur introduite par conduction est évacuée par convection (dans le volume élémentaire ne s'accumule aucune quantité de chaleur D dQ = 0).

Il est à noter que *l'équation de l'énergie s'applique à la couche-limite thermique*, puisque dans celle-ci se manifeste la variation entière de température.

On peut écrire le membre droit de l'équation (10.26) sous une forme condensée, comme il suit:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{Dt}{d\tau} \qquad (10.28)$$

Par $Dt/d\tau$ on a désigné **la dérivée substantielle de la température**. Cette dérivée est formellement identique à la dérivée d'une fonction composée $t = t(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau))$, compte tenu que: $w_x = \frac{\partial x}{\partial \tau}$, $w_y = \frac{\partial y}{\partial \tau}$, $w_z = \frac{\partial z}{\partial \tau}$

Par conséquent l'opérateur "dérivée substantielle" s'écrit:

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (10.29)$$

La dérivée substantielle caractérise les variations en fonction de temps des grandeurs correspondant aux processus de transfert de substance. Le terme $\partial / \partial \tau$ dans (10.29) désigne **la variation locale** de la grandeur respective par rapport au temps; les autres termes constituent **la variation causée par l'écoulement** de la grandeur respective. En conséquence, on peut écrire l'équation de l'énergie comme il suit:

$$\boxed{\frac{Dt}{d\tau} = a\nabla^2 t} \qquad (10.30)$$

10.2.3. Equation de l'écoulement laminaire du fluide visqueux incompressible (équation de Navier-Stokes)

Cette équation se déduit en appliquant au volume élémentaire dV = dx dy dz de fluide en écoulement, le théorème de conservation de la quantité de mouvement. Rappelons que le théorème affirme que la somme des projections (suivant la direction du mouvement) des forces extérieures s'exerçant sur un corps, égale la variation par unité de temps de la quantité de mouvement de celui-ci:

$$\sum_{i=1}^{n} dF_{ext,i} = \frac{d}{d\tau}\left(dm\, w\right) = dm \frac{dw}{d\tau} \qquad (10.31)$$

Dans le cas analysé, les forces extérieures s'exerçant sur le volume élémentaire sont les *forces de pression*, *les forces massiques* et *les forces de frottement visqueux*. Puisqu'il s'agit de l'écoulement d'un fluide, au lieu de la dérivée on considérera la dérivée substantielle de la vitesse. Ceci est nécessaire parce-que les composantes de la vitesse sont variables en fonction de temps, mais aussi suivant les trois directions *Ox*, *Oy* et *Oz*.

Considérons à titre d'exemple la direction *Ox*. La dérivée substantielle de la composante w_x de la vitesse est:

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \qquad (10.32)$$

Par conséquent, la variation de la quantité de mouvement suivant cette direction est:

$$dm\frac{Dw_x}{d\tau} = \rho dV\left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}\right) \qquad (10.33)$$

Ecrivons maintenant les composantes (suivant cette direction) des forces extérieures - voir aussi Fig. 10.8.

a. La force de pression

$$dF_{p,x} = p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

$$\Rightarrow\ dF_{p,x} = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \qquad (10.34)$$

Remarques:

1. Le signe “moins” montre que la force de pression s’oppose à l’écoulement
2. La pression n’a pas d’indice (conséquence du principe de Pascal)

b. Les forces massiques

Ce sont les forces de pesanteur, électrique, magnétique etc. Nous considérerons seulement *la force de pesanteur*:

$$dF_{m,x} = \rho g_x dV \qquad (10.35)$$

où g_x représente la composante de l’accélération de la pesanteur suivant l’axe *Ox*.

c. Les forces de viscosité

Soit $\tau_{y,x}$ la contrainte tangentielle produite par la variation de la vitesse w_x suivant la direction *Oy*:

$$\tau_{y,x} = -\eta\frac{\partial w_x}{\partial y} \qquad (10.36)$$

La force de frottement visqueux correspondante est:

$$dF_{fy,x} = \tau_{y,x}dx\,dz - \left(\tau_{y,x} + \frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial y}dy\right)dx\,dz = -\frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial y}dx\,dy\,dz = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\eta\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz$$

$$\text{L}\quad dF_{fy,x} = \eta\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}dV \qquad (10.37)$$

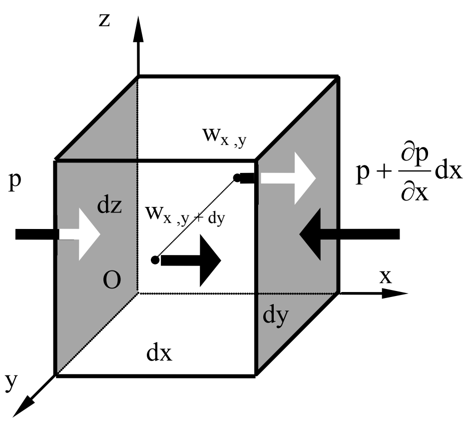


Fig. 10.8.

Par similarité, on écrit les deux autres composantes:

$$dF_{fx,x}=\eta\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}dV \qquad (10.38)$$

$$dF_{fz,x}=\eta\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}dV \qquad (10.39)$$

Par conséquent, la force de viscosité $dF_{f,x}$ provoquée par la variation de la vitesse w_x suivant les trois directions est:

$$dF_{f,x}=\eta\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)dV=\eta\nabla^2 w_x dV \qquad (10.40)$$

Le théorème de conservation de la quantité de mouvement pour le cas considéré donne:

$$dm\frac{Dw_x}{d\tau}=dF_{p,x}+dF_{m,x}+dF_{f,x} \qquad (10.41)$$

et compte tenu des relations (10.33) - (10.35) et (10.40), après les réductions nécessaires, on obtient:

$$\rho\frac{Dw_x}{d\tau}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\nabla^2 w_x \qquad (10.42)$$

En divisant (10.42) par ρ on trouve:

$$\boxed{\frac{Dw_x}{d\tau}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 w_x} \qquad (10.43)$$

L'équation (10.43) représente l'équation de Navier-Stokes écrite pour la direction *Ox*. Les autres deux formes (pour les directions *Oy* et *Oz*) s'obtiennent d'une manière similaire.

En rassemblant les équations correspondant aux trois directions de l'écoulement, on écrit l'équation de Navier-Stokes sous forme vectorielle:

$$\boxed{\frac{D\vec{w}}{d\tau}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{w}} \qquad (10.44)$$

où $\nabla p=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}$.

Parfois il est nécessaire de tenir compte de la variation de la densité en fonction de la température et par conséquent on introduit **le coefficient de dilatation volumique** β défini par;

$$\beta = \frac{1}{v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p \tag{10.45}$$

où v_0 représente le volume massique du fluide à une température de référence t_0 (0°C d'habitude).

L'équation (10.43) devient:

$$\boxed{\frac{Dw_x}{d\tau} = g_x\beta\Delta t - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 w_x} \tag{10.46}$$

où $\Delta t = t - t_0$.

10.2.4. Equation du transfert de chaleur

Cette équation exprime l'égalité des quantités de chaleur échangées par conduction et par convection:

$$-\lambda_f\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=0} = \alpha\left(t_p - t_f\right) \tag{10.47}$$

où n désigne la normale à la surface de la paroi.

10.3. Méthodes de calcul du coefficient convectif

Il existe quatre méthodes générales utilisées pour déterminer le coefficient d'échange de chaleur par convection:

1. La théorie de la similitude
2. Les solutions mathématiques exactes des équations de la couche-limite
3. L'analyse approximative de la couche-limite
4. L'analogie entre les transferts de chaleur, substance et quantité de mouvement

1. *La théorie de la similitude*

C'est une théorie empirique (basée sur les données expérimentales) permettant de généraliser les résultats obtenus par suite d'une étude expérimentale d'un phénomène de transfert de chaleur convectif, aux autres phénomènes dits *similaires* ou *semblables*. Cette méthode établit les conditions qu'une classe de phénomènes doit accomplir pour être considérés semblables, phénomènes auxquels on peut appliquer plus loin les règles de la similitude.

2. *Les solutions mathématiques exactes des équations de la couche-limite*

Cette méthode impose la résolution simultanée des équations de continuité (10.14), de l'énergie (10.26), de Navier-Stokes (10.44) et du transfert de chaleur (10.46), en supposant implicitement qu'il est possible de donner une description mathématique exacte du phénomène considéré. Puisque la seule description complète d'un phénomène convectif est celle d'un écoulement laminaire autour des corps ayant une géométrie très simple, la méthode exacte est limitée à ce type de phénomènes. Cependant, même dans ces cas, il est parfois impossible de trouver la solution analytique des équations mentionnées à cause de l'appareil mathématique insuffisamment développé en ce qui concerne le traitement des équations à dérivées partielles.

3. *L'analyse approximative de la couche-limite*

Cette méthode renonce de décrire exactement l'écoulement et le transfert de chaleur dans la couche-limite, en utilisant des équations simplifiées des distributions de vitesse et de température dans celle-ci. La méthode est appliquable aussi bien aux écoulements laminaires qu'aux écoulements turbulents et la précision des résultats est acceptable du point de vue technique.

4. *L'analogie entre les transferts de chaleur, masse et quantité de mouvement*

C'est un outil très efficace dans l'analyse des transferts de chaleur turbulents. Ces phénomènes sont à présent insuffisamment connus pour être traités par l'analyse exacte ou approximative. Cette méthode est fondée sur le constat que dans un écoulement turbulent accompagné d'un échange de chaleur, il existe des transferts simultanés de chaleur, substance et quantité de mouvement pouvant être considérés comme analogues.

Nous allons présenter plus loin seules les méthodes utilisant la théorie de la similitude et l'analogie entre les transferts de chaleur, masse et quantité de mouvement.

10.3.1. Théorie de la similitude

La théorie de la similitude répond aux questions suivantes:

1. Comment simplifier l'analyse des multiples influences déterminantes d'un processus convectif d'échange de chaleur.

D'après ce qu'on vient de voir, le nombre de variables indépendantes déterminant un phénomène convectif est compris entre 7 et 11. Par conséquent, il est pratiquement impossible d'analyser les influences simultanées exercées par toutes ces variables. La théorie de la similitude réduit formellement le nombre

de variables en les groupant en nombres adimensionnels, facilitant ainsi l'analyse théorique et expérimentale du phénomène.

2. Comment généraliser les résultats expérimentaux.

Cette opération devient facile lorsqu'on utilise la théorie de la similitude: il suffit de préciser les conditions de similarité définissant un groupe (une famille) de phénomènes semblables pour obtenir la généralisation des résultats des expériences réalisées sur un seul représentant du groupe. L'évolution des autres phénomènes appartenant à la même classe de similitude peut être prédite tout simplement en écrivant les relations établies (en appliquant les règles de similitude) entre les nombres adimensionnels caractéristiques au groupe de phénomènes étudiés. Ces relations, dites **corrélations** sont déduites par voie théorique et par des expériences.

3. En quelles conditions peut-on étudier un phénomène à échelle réduite.

La théorie de la similitude étant en soi une méthode basée sur la rassemblance géométrique et physique, ces conditions découlent directement des règles de similitude. Par conséquent, la théorie de la similitude met les bases de la théorie de la simulation sur des modèles à échelle réduite.

L'idée qui a déterminé le développement de la théorie de la similitude a été suggérée par la rassemblance des figures géométriques. Transposée sur les phénomènes physiques, cette idée, énoncée comme **loi générale de la similitude**, affirme que:

Lorsque les flux de substance et d'énergie évoluent d'une manière similaire autour des corps semblables du point de vue géométrique, (c'est à dire que les rapports des températures, vitesses, pressions etc. dans les points correspondants sont ***constants***), on peut dire alors que les évolutions des phénomènes physiques étudiés sont semblables et par conséquent, les systèmes respectifs ***sont similaires du point de vue physique***.

La conséquence directe de la loi énoncée est:

La condition de similitude de deux ou plusieurs phénomènes constitue ***l'égalité des nombres adimensionnels*** *caractéristiques au groupe de phénomènes considérés.*

Il existe deux méthodes d'obtention des nombres adimensionnels:

- **la méthode des transformations d'échelle**
- **l'analyse dimensionnelle**

Nous allons utiliser seulement la première méthode à titre d'exemple dans un cas simple, afin de mettre en évidence les procedures spécifiques.

Les groupes adimensionnels (dits aussi **nombres sans dimension**) résultent en écrivant l'équivalent adimensionnel des équations décrivant les phénomènes étudiés, dites en ce cas **équations normalisées**.

Considérons l'écoulement unidimensionnel laminaire stationnaire d'un fluide incompressible le long d'une paroi verticale dont la température t_p est supérieure à la température t_0 du fluide (voir Fig. 10.9.). Désignons par l_0 la longueur de la paroi et par w_0 la vitesse du fluide avant le contact de celui-ci avec la paroi.

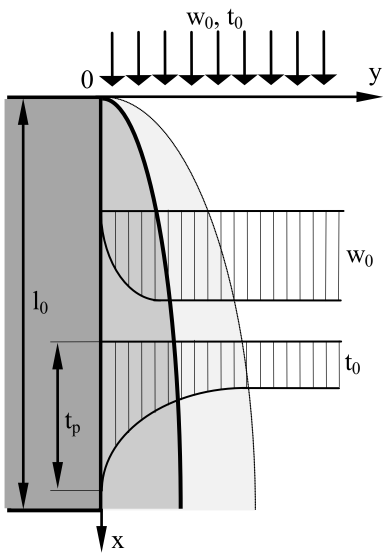


Fig. 10.9.

Puisque l'écoulement est vertical, unidimensionnel et stationnaire, on conclut que:

$$g_y = g_z = 0; \quad g_x = g \tag{10.48}$$

$$w_y = w_z = 0; \quad w_x = w \tag{10.49}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = 0 \tag{10.50}$$

En conséquence, les conditions aux limites sont:

$$x < 0, \quad \forall y: \quad \begin{cases} w = w_0 \\ t = t_0 \end{cases} \tag{10.51}$$

$$0 < x < l_0, \quad y = 0: \quad \begin{cases} w = 0 \\ t = t_p \end{cases} \tag{10.52}$$

Les équations à normaliser sont en ce cas l'équation de Navier-Stokes, l'équation de l'énergie et l'équation du transfert de chaleur. On normalise une équation par rapport à une variable A, en la divisant par une valeur A_0, dite **de référence** (ou **valeur-standard**) de cette variable et en la multipliant ensuite par A_0 pour ne pas modifier le sens physique de l'équation.

Le choix de la valeur-standard A_0 est plus ou moins arbitraire.

On obtient:

$$A = A_0 \frac{A}{A_0} = A_0 \overline{A} \tag{10.53}$$

où $\overline{A} = \dfrac{A}{A_0}$ représente la valeur **adimensionnelle (ou normalisée) de la variable** $\boldsymbol{A}$.

a. <u>*Normalisation de l'équation de Navier-Stokes*</u>

Compte tenu des relations (10.48) - (10.50), on obtient la suivante forme particulière de l'équation:

$$w\frac{\partial w}{\partial x}=\beta g\Delta t-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{10.54}$$

Choisissons maintenant les valeurs-standard des variables:
- pour la vitesse: $\mathbf{w_0}$ (la vitesse du fluide avant le contact avec la paroi)
- pour la température: $\mathbf{t_0}$ (ou $\Delta t_0 = t_p - t_0$)
- pour les longueurs: $\mathbf{l_0}$ (longueur de la paroi)
- pour les pressions: $\boldsymbol{\rho w_0^2}$ (pression dynamique correspondant à la vitesse w_0[1])

Prenons chaque terme de l'équation (10.54) en lui appliquant la procédure de normalisation donnée par (10.53):

♦ $$w\frac{\partial w}{\partial x}=w_0\overline{w}\frac{\partial(w_0\overline{w})}{\partial(l_0\overline{x})}=\frac{w_0^2}{l_0}\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}} \tag{10.55}$$

où $\overline{w}=\dfrac{w}{w_0}$ et $\overline{x}=\dfrac{x}{l_0}$ sont respectivement *la vitesse et la coordonnée adimensionnelles*.

♦ $$\beta g\Delta t=\beta g\Delta t_0\Delta\overline{t} \tag{10.56}$$

Dans (10.56), $\Delta\overline{t}=\dfrac{\Delta t}{\Delta t_0}$ représente *la différence adimensionnelle de température*.

♦ $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho w_0^2\overline{p}\right)}{\partial(l_0\overline{x})}=\frac{w_0^2}{l_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} \tag{10.57}$$

où $\overline{p}=\dfrac{p}{\rho w_o^2}$ désigne *la pression adimensionnelle*.

♦ $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{w_0\partial^2(w_0\overline{w})}{l_0^2\partial(l_0\overline{x})^2}=\frac{w_0}{l_0^2}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{x}^2} \tag{10.58}$$

Dans (10.58) on a tenu compte de la définition de la dérivée pour obtenir le résultat ci-dessus.

De même, les autres deux termes du laplacien de la vitesse s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{w_0}{l_0^2}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{y}^2};\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{w_0}{l_0^2}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{z}^2} \tag{10.59}$$

---

[1] Dans ce cas on néglige le terme 1/2 puisque nous sommes intéressés seulement par le côté dimensionnel des relations mathématiques.

Compte tenu des relations (10.55) - (10.59), l'équation (10.54) devient:

$$\frac{w_0^2}{l_0}\overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}} = \beta g \Delta t_0 \Delta\overline{t} - \frac{w_0^2}{l_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \nu \frac{w_0}{l_0^2}\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{z}^2}\right) \qquad (10.60)$$

En divisant l'équation ci-dessus par $\frac{w_0^2}{l_0}$, on trouve la forme normalisée de l'équation de Navier-Stokes:

$$\overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}} = \frac{\beta g l_0 \Delta t_0}{w_0^2}\Delta\overline{t} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \frac{\nu}{w_0 l_0}\nabla^2 \overline{w} \qquad (10.61)$$

En comparant les équations (10.54) et (10.61), on constate que la dernière contient deux rapports sans dimension. On reconnaît immédiatement **le nombre de Reynolds**:

$$\boxed{Re = \frac{w_0 l_0}{\nu}} \qquad (10.62)$$

L'autre nombre est dit **nombre d'Archimède (*Ar*)**:

$$\boxed{Ar = \frac{\beta g l_0 \Delta t_0}{w_0^2}} \qquad (10.63)$$

Par conséquent, l'équation (10.63) devient:

$$\overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}} = Ar \cdot \Delta\overline{t} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \frac{1}{Re}\nabla^2 \overline{w} \qquad (10.64)$$

Le nombre de Reynolds caractérise par sa valeur le régime d'écoulement (laminaire, de transition ou turbulent). Du point de vue physique, ce nombre représente le quotient de la force d'inertie par la force de frottement visqueux. Le nombre d'Archimède caractérise les forces ascensionnelles produites par les différences de densité, dues à l'échange de chaleur. D'habitude, on exprime *Ar* par l'intermédiaire des nombres de Reynolds et **de Grashof (*Gr*)**:

$$Ar = \frac{Gr}{Re^2} \qquad (10.65)$$

$$\boxed{Gr = \frac{g l_0^3}{\nu^2}\beta \Delta t_0} \qquad (10.66)$$

Le nombre de Grashof intervient dans les processus de convection naturelle, caractérisant les forces ascensionnelles et de viscosité.

b. <u>Normalisation de l'équation de l'énergie</u>

Compte tenu que le régime thermique est stationnaire ($\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$) et que $w = w_x$ ($w_y = w_z = 0$), l'équation (10.26) devient:

$$w\frac{\partial t}{\partial x} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \tag{10.67}$$

On normalise les termes de l'équation:

- $$w\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{w_0 t_0}{l_0}\bar{w}\frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} \tag{10.68}$$

où $\bar{t} = \frac{t}{t_0}$ est *la température adimensionnelle*.

- $$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{t_0}{l_0^2}\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{x}^2}; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{t_0}{l_0^2}\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{y}^2}; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{t_0}{l_0^2}\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{z}^2} \tag{10.69}$$

Par conséquent, l'équation (10.67) devient:

$$\frac{w_0 t_0}{l_0}\bar{w}\frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} = \frac{a t_0}{l_0^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{z}^2}\right) \tag{10.70}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{w}\frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} = \frac{a}{w_0 l_0}\left(\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{z}^2}\right) = \frac{a}{w_0 l_0}\nabla^2 \bar{t} \tag{10.71}$$

Le rapport $\frac{w_0 l_0}{a} = \frac{w_0 l_0 \rho c_p}{\lambda}$ définit **le nombre de Péclet (*Pe*)**:

$$Pe = \frac{w_0 l_0 \rho c_p}{\lambda} \tag{10.72}$$

Ce nombre représente le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à la quantité de chaleur échangée par conduction. On peut écrire aussi:

$$Pe = \frac{w_0 l_0}{a} = \frac{w_0 l_0}{\nu}\frac{\nu}{a}$$

où $\frac{w_0 l_0}{\nu} = Re$ et $\frac{\nu}{a}$ représente **le nombre de Prandtl (*Pr*)**:

$$\boxed{Pr = \frac{\nu}{a}} \tag{10.73}$$

$$\Rightarrow \quad Pe = RePr \tag{10.74}$$

Le nombre de Prandtl dépend seulement des propriétés du fluide et représente le rapport de la distribution de vitesse à la distribution de température.

Par conséquent, l'équation normalisée de l'énergie s'écrit:

$$Pe\,\overline{w}\frac{\partial\overline{t}}{\partial\overline{x}} = \nabla^2\overline{t} \qquad (10.75)$$

ou:

$$RePr\,\overline{w}\frac{\partial\overline{t}}{\partial\overline{x}} = \nabla^2\overline{t} \qquad (10.76)$$

En analysant les formes normalisées des équations de Navier-Stokes et de l'énergie, il apparaît comme évident que:

– la vitesse adimensionnelle $\overline{w}$ est en fonction des coordonnées adimensionnelles et des nombres de Reynolds et d'Archimède (ou de Grashof):

$$\overline{w} = f_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, Re, Ar) = f_2(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, Re, Gr) \qquad (10.77)$$

– la température adimensionnelle $\overline{t}$ est en fonction des coordonnées adimensionnelles et du nombre de Péclet (ou des nombres de Reynolds et de Prandtl):

$$\overline{t} = f_3(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, Pe) = f_4(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, Re, Pr) \qquad (10.78)$$

Par conséquent, on peut exprimer les champs de vitesse et de température adimensionnelles en fonction des coordonnées normalisées et des trois nombres (*Re*, *Gr*, *Pr*). Puisque l'écoulement et l'échange de chaleur s'influencent réciproquement, l'équation de Navier-Stokes (qui fournit le champ de vitesse) et l'équation de l'énergie (dont la solution représente le champ de température) *doivent être couplées par l'intermédiaire des trois nombres*.

Donc:

$$\overline{w} = f_5(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, Re, Gr, Pr) \qquad (10.79)$$

$$\overline{t} = f_6(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, Re, Gr, Pr) \qquad (10.80)$$

Les relations (10.79) et (10.80) montrent que la vitesse et la température adimensionnelles peuvent être en ce cas exprimées en fonction des trois nombres (*Re*, *Gr*, *Pr*). Par conséquent:

Lorsque deux phénomènes du type étudié sont caractérisés par des valeurs égales de *Re*, *Gr* et *Pr*, les deux phénomènes sont similaires et les champs de vitesse et de température adimensionnelles sont les mêmes.

Jusqu'à présent, on a analysé seulement les processus d'écoulement et de transfert de chaleur se déroulant dans les couches-limite hydrodynamique, respectivement thermique. Pour compléter la description du phénomène convectif, il est nécessaire de considérer la zone de contact fluide-paroi, c'est à dire de normaliser l'équation d'échange de chaleur.

c. *Normalisation de l'équation d'échange de chaleur*

Dans le cas étudié, cette équation devient:

$$\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha\left(t_p - t_0\right) = \alpha\Delta t_0 \qquad (10.81)$$

(le signe "moins" a été omis puisque celui-ci n'influence du point de vue dimensionnel la relation).

On peut écrire sans rien changer le gradient de température, comme suit:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial\left(t - t_0\right)}{\partial y} = \frac{\partial(\Delta t)}{\partial y} \qquad (10.82)$$

et on obtient:

$$\lambda\left(\frac{\partial(\Delta t)}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha\Delta t_0 \qquad (10.83)$$

Le seul terme à normaliser est la dérivée partielle:

$$\frac{\partial(\Delta t)}{\partial y} = \frac{\Delta t_0}{l_0}\frac{\partial(\Delta\bar{t})}{\partial\bar{y}} \qquad (10.84)$$

Compte tenu des relations (10.83) et (10.84), on trouve:

$$\frac{\partial(\Delta\bar{t})}{\partial\bar{y}} = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \qquad (10.85)$$

Le quotient $\frac{\alpha l_0}{\lambda}$ désigne **le nombre de Nusselt (*Nu*)**:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda}} \qquad (10.86)$$

Le nombre de Nusselt représente le rapport du gradient de température dans le fluide sur la surface de la paroi à un gradient de température de référence.

Il résulte:

$$\frac{\partial(\Delta\bar{t})}{\partial\bar{y}} = Nu \qquad (10.87)$$

Mais, si $\bar{t}$ est en fonction des coordonnées adimensionnelles et des nombres de Reynolds, de Grashof et de Prandtl, alors la différence $\Delta\bar{t}$ est aussi en fonction des mêmes variables:

$$\Delta\bar{t} = f_7\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Re, Gr, Pr\right) \qquad (10.88)$$

Il s'ensuit que le gradient de température $\frac{\partial(\Delta\bar{t})}{\partial\bar{y}}$ dépend des mêmes variables:

$$\frac{\partial(\Delta\bar{t})}{\partial\bar{y}} = f_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Re, Gr, Pr) \tag{10.89}$$

Compte tenu des relations (10.87) et (10.89), on conclut que:

$$\boxed{Nu = f_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Re, Gr, Pr)} \tag{10.90}$$

La dernière expression représente **la corrélation du phénomène étudié**. Puisque le nombre de Nusselt contient le coefficient de transfert α, l'équation (10.90) permet le calcul de celui-ci par l'intermédiaire de ce nombre. Par conséquent, dans le cas considéré, outre les coordonnées adimensionnelles, α dépend des nombres *Re*, *Gr* et *Pr*.

Le point faible de la méthode est que celle-ci ne peut pas préciser la forme explicite de la fonction f_8. Pour déterminer l'expression mathématique de f_8, il est nécessaire d'effectuer des expériences. On écrit f_8 sous une forme générale (on renonce d'écrire les coordonnées adimensionnelles, parce-que celles-ci sont implicitement comprises dans la similitude des configurations géométriques):

$$\boxed{f_8 = C\,Re^m Gr^n Pr^p} \tag{10.91}$$

La constante *C* et les exposants *m*, *n* et *p* se déterminent en fonction des données expérimentales couvrant les domaines de variation des nombres *Re*, *Gr* et *Pr*.

10.3.2. Analogie entre les transferts de chaleur, masse et quantité de mouvement

Cette méthode s'applique aux processus convectifs turbulents. L'écoulement turbulent est insuffisamment connu pour une détermination exacte du coefficient de transfert α et par conséquent on construit un modèle simplifié du mécanisme de transfert. L'essence de ce modèle peut être synthétisée par l'affirmation suivante:

> Le mouvement de mélange suivant une direction normale à la direction de l'écoulement, produit des transferts de substance, chaleur et quantité de mouvement qui peuvent être décrits par des équations similaires.

En cas d'un écoulement turbulent, à la vitesse moyenne de déplacement se superposent des variations irrégulières (chaotiques) - dites **pulsations** - de la vitesse suivant la direction de l'écoulement, ainsi que dans directions normales à celle-ci. Les pulsations de vitesse ne peuvent être décrites par voie analytique. Celles-ci produisent des courants turbulents constituant la cause du transfert combiné de substance - chaleur - quantité de mouvement.

Le cas de l'écoulement turbulent stationnaire est traité par l'analogie de Prandtl-Taylor.

10.3.2.1. Analogie de Prandtl-Taylor

Considérons la structure de l'écoulement turbulent le long d'une paroi (plaque) plane - voir Fig. 10.10.

Il existe deux régions: la couche-limite laminaire secondaire et la région de transition (la couche-tampon). On désigne par l'indice *"p"* la vitesse *w* et la température *t* dans la couche-limite laminaire secondaire, par *"i"* les valeurs des mêmes grandeurs correspondant à la surface de séparation entre les deux régions et par *"f"* la vitesse et la température dans la zone non-perturbée (y compris la frontière séparant celle-ci de la région de la couche-tampon). Dans le tableau ci-dessus on a schématisé les valeurs correspondantes.

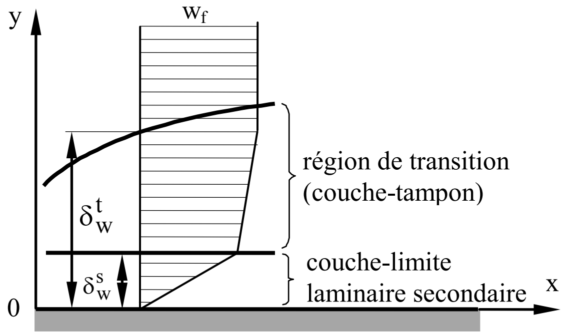


Fig. 10.10.

On étudie les deux régions, en analysant les phénomènes produits par l'action simultanée de l'écoulement et du transfert de chaleur.

y	w	t
0	$w_p = 0$	t_p
δ_w^s	w_i	t_i
δ_w^t	w_f	t_f

a. <u>*La couche-limite laminaire secondaire*</u>

Puisque l'écoulement est laminaire dans cette région, l'échange de chaleur paroi-fluide est exclusivement conductif. Par conséquent, la densité de flux traversant par conduction la couche-limite laminaire secondaire, s'écrit:

$$q^s = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \tag{10.92}$$

La force de frottement visqueux dans le fluide en écoulement laminaire produit une contrainte tangentielle (de cisaillement) désignée par τ, dont l'expression est donnée par la loi de Newton:

$$\tau = -\eta \frac{\partial w}{\partial y} \tag{10.93}$$

En divisant les équations (10.92) et (10.93) membre à membre, on trouve:

$$q^s = \tau \frac{\lambda}{\eta} \frac{\frac{\partial t}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial y}} \tag{10.94}$$

Compte tenu que la couche-limite laminaire secondaire est très mince, on peut supposer que les variations de la vitesse et de la température suivant la direction *Oy* (normale à la direction de l'écoulement) sont linéaires. En conséquence, les gradients de température $\frac{\partial t}{\partial y}$ et de vitesse $\frac{\partial w}{\partial y}$ peuvent être écrits comme suit:

$$\frac{\partial t}{\partial y} \cong \frac{t_i - t_p}{\delta^s}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \cong \frac{w_i - w_p}{\delta^s} = \frac{w_i}{\delta^s} \tag{10.95}$$

Il résulte:

$$q^s = \tau \frac{\lambda}{\eta} \frac{t_i - t_p}{w_i} \tag{10.96}$$

Au niveau de la surface de la paroi: $q^s = q^p$ (conservation de l'énergie) et $\tau = \tau_p$. Par conséquent:

$$q^p = \tau_p \frac{\lambda}{\eta} \frac{t_i - t_p}{w_i} \tag{10.97}$$

La dernière relation montre que la quantité de chaleur échangée au niveau de la surface de la paroi est proportionnelle à la contrainte tangentielle de frottement fluide-paroi.

b. <u>*La région de la couche-tampon*</u>

Imaginons dans cette région un plan de contrôle *A - A*, placé entre deux autres plans parallèles *1 - 1* et *2 - 2* (voir Fig. 10.11.). A cause de la turbulence de l'écoulement (supposé stationnaire), dans un intervalle de temps quelconque, le plan *A - A* est traversé dans les deux sens:

- depuis le plan *1 - 1* vers le plan *2 - 2* par la masse *m* dont la vitesse est désignée par *w* et la température par *t*
- à partir du plan *2 - 2* vers le plan *1 - 1*, par la même masse, dont la vitesse est désignée par *w*' (supposons que w' > w) et la température par *t*'

A cause des vitesses différentes, les quantités de mouvement des deux masses égales sont différentes. Le phénomène qui se produit est le suivant:

♦ Dans le plan 2 - 2: la tranche de fluide quittant le plan *1 - 1* (caractériséé par la vitesse de transport *w*), arrive dans une région dont la vitesse est supérieure (w' > w). Puisque la quantité de movement de cette tranche est inférieure à la quantité de movement de la couche supérieure, celle-ci est ralentie (freinée) par l'arrivée d'une masse de fluide provenant de la couche inférieure.

♦ Dans le plan 1 - 1: la masse de fluide provenant du plan *2 - 2*, caractérisé par la vitesse de transport *w'*, arrive dans le plan *1 - 1*, dans lequel la vitesse de transport est inférieure. Par conséquent, l'arrivée de cette tranche de fluide produit une accélération de la couche inférieure.

Le résultat de cet échange de masse dont l'effet est un transfert de quantité de mouvement entre les deux couches séparées par le plan fictif *A - A*, est une réduction de la différence de vitesse Δw = w' - w, c'est à dire une réduction de la vitesse relative des deux couches. Ce phénomène équivaut au freinage produit par une force de frottement s'exerçant entre les couches voisines caractérisées par des vitesses différentes. Bien qu'en réalité ce frottement n'existe pas, le transfert de quantité de mouvement causé par le mélange turbulent agit comme si entre les deux couches existait un force de viscosité. Ceci nous permet d'introduire **une contrainte fictive de frottement** (τ_t), dite aussi **contrainte turbulente apparente**.

Pour calculer cette contrainte, on applique la loi de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction de l'écoulement (*Ox*): la résultante R^t des forces fictives de frottement visqueux dues au mélange turbulent, égale la variation de la quantité de mouvement pendant l'intervalle élémentaire de temps désigné par dθ:

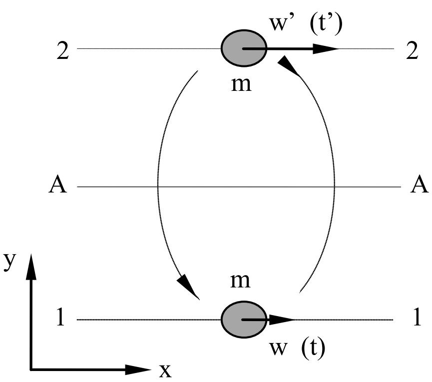


Fig. 10.11.

$$R^t = \frac{d}{d\theta}\left[m(w'-w)\right] = \frac{dm}{d\theta}(w'-w) = \dot{m}(w'-w) \quad [N]$$

où $\dot{m}$ désigne *le débit massique*, évalué en kg / s.

La contrainte fictive de frottement τ_t représente le quotient de la force fictive de frottement R^t par la surface *S* du plan de séparation *A - A*:

$$\tau^t = \frac{R^t}{S} = \frac{\dot{m}}{S}(w'-w) \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{10.98}$$

Puisque les températures des quantités de fluide traversant le plan *A - A* sont différentes, le transfert de substance a pour résultat un transfert convectif de chaleur, dont la densité de flux q^t se calcule avec la relation évidente:

$$q^t = \frac{1}{S}\frac{d}{d\theta} m c_p (t' - t) = \frac{\dot{m}}{S} c_p (t' - t) \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{10.99}$$

En divisant les équations (10.98) et (10.99) membre à membre, on obtient après les réductions nécessaires:

$$q^t = \tau^t c_p \frac{t' - t}{w' - w} \tag{10.100}$$

On suppose que $\tau^t \cong \tau_p$ et on place le plan *A - A* dans l'intérieur de la couche-tampon tel que:

- le plan *1 - 1* constitue la surface de séparation couche-limite laminaire secondaire - couche-tampon L $w = w_i$ et $t = t_i$
- le plan *2 - 2* représente le surface séparant la couche-tampon et la région non-perturbée L $w' = w_f$ et $t' = t_f$

Par conséquent:

$$q^t = \tau_p c_p \frac{t_f - t_i}{w_f - w_i} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{10.101}$$

Puisque le régime thermique est stationnaire, la quantité de chaleur $q^s = q^p$ passant à travers la couche-limite laminaire secondaire doit être égale à la quantité de chaleur q^t transportée par convection à travers la couche-tampon: $q^s = q^t = q^p$. En utilisant comme point de départ les relations (10.97) et (10.101) on écrit les différences de température:

(10.97) L

$$t_i - t_p = q^p \frac{\eta w_i}{\tau_p \lambda} \tag{10.102}$$

(10.101) L

$$t_f - t_i = q^p \frac{w_f - w_i}{\tau_p c_p} \tag{10.103}$$

En additionnant les relations ci-dessus, on obtient successivement:

$$q^p = \frac{t_f - t_p}{\frac{1}{\tau_p c_p}(w_f - w_i) + \frac{1}{\tau_p}\frac{\eta}{\lambda} w_i} = \frac{t_f - t_p}{\frac{w_f}{\tau_p c_p}\left(1 - \frac{w_i}{w_f} + \frac{c_p \eta}{\lambda}\frac{w_i}{w_f}\right)} = \frac{\tau_p c_p}{w_f}\frac{t_f - t_p}{1 + \frac{w_i}{w_f}\left(\frac{c_p \eta}{\lambda} - 1\right)}$$

Compte tenu que: $\frac{c_p\eta}{\lambda} = \frac{c_p\rho\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho c_p}} = \frac{\nu}{a} = \Pr$, on trouve:

$$q^p = \frac{\tau_p c_p}{w_f} \frac{1}{1 + \frac{w_i}{w_f}(\Pr - 1)} \left(t_f - t_p\right) \tag{10.104}$$

Mais, si l'on tient compte que $q^p = \alpha\left(t_f - t_p\right)$, par identification on obtient l'expression du coefficient de transfert α:

$$\boxed{\alpha = \frac{\tau_p c_p}{w_f} \frac{1}{1 + \frac{w_i}{w_f}(\Pr - 1)}} \tag{10.105}$$

Cette relation correspond à **l'analogie de Prandtl-Taylor** et permet le calcul du coefficient de transfert dans les hypothèses simplificatrices adoptées. Le point faible de la relation (10.105) est que la valeur w_i de la vitesse au niveau de la surface de séparation entre la couche-limite laminaire secondaire et la couche-tampon est pratiquement impossible à déterminer théoriquement.

Le cas particulier Pr = 1 correspond à *l'analogie de Reynolds*.

10.3.2.2. Analogie de Reynolds

En posant Pr = 1 dans l'équation (10.105), on obtient la relation mathématique de l'analogie de Reynolds:

$$\boxed{\alpha = \frac{\tau_p c_p}{w_f}} \tag{10.106}$$

En ce cas, w_i n'apparaît plus dans la relation et donc il est facile de calculer α.

On écrit l'égalité des densités de flux données par les équations (10.97) et (10.101), en trouvant:

$$\frac{\lambda}{\eta} \frac{t_i - t_p}{w_i} = c_p \frac{t_f - t_i}{w_f - w_i}$$

$$\Rightarrow \frac{t_i - t_p}{t_f - t_i} = \frac{\eta c_p}{\lambda} \frac{w_i}{w_f - w_i} = \Pr \frac{w_i - w_p}{w_f - w_i} \tag{10.107}$$

(bien que $w_p = 0$, on a introduit cette vitesse dans la relation afin de mettre en évidence la normalisation des températures).

Par conséquent, on peut conclure que:

$$\Delta\bar{t}^s = \Pr \Delta\overline{w}^s \tag{10.108}$$

où:

♦ $\Delta\bar{t}^s$ désigne les champ de température dans la couche-limite laminaire secondaire, normalisé par rapport à la différence de température t_f - t_i

♦ $\Delta\bar{w}^s$ désigne les champ de vitesse dans la couche-limite laminaire secondaire, normalisé par rapport à la différence de vitesse w_f - w_i

Comme Pr = 1 dans l'analogie de Reynolds, **les deux champs normalisés sont égaux**:

$$\boxed{\Delta\bar{t}^s = \Delta\bar{w}^s} \tag{10.109}$$

Le nombre de Prandtl joue le rôle d'un critère de similitude entre le champ de température et les champ de vitesse:

Lorsque Pr = 1, les deux champs adimensionnels sont identiques dans la couche-limite laminaire secondaire.

Par la suite, nous appliquerons l'analogie de Reynolds aux deux cas particuliers simples: l'écoulement turbulent le long d'une plaque plane, respectivement dans une conduite.

a. <u>*Ecoulement turbulent le long d'une plaque plane*</u>

Pour évaluer la contrainte tangentielle τ_p, on introduit un **coefficient moyen de résistance par frottement ($c_{f,m}$)**, en assimilant τ_p à une perte locale de pression dans un écoulement:

$$\tau_p = c_{f,m}\frac{\rho w_f^2}{2} \tag{10.110}$$

Par conséquent, compte tenu de l'équation (10.106), α devient:

$$\alpha = \frac{\tau_p c_p}{w_f} = c_{f,m}\frac{\rho w_f^2}{2}\frac{c_p}{w_f} = c_{f,m}\frac{\rho c_p w_f}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\rho c_p w_f} = \frac{c_{f,m}}{2} \tag{10.111}$$

Le membre gauche de l'équation(10.111) représente **le nombre de Stanton (*St*)**:

$$\boxed{St = \frac{\alpha}{\rho c_p w_f} = \frac{Nu}{RePr}} \tag{10.112}$$

Puisque dans l'analogie de Reynolds Pr = 1, l'équation (10.111) donne:

$$\frac{Nu}{RePr} = \frac{Nu}{Re} = \frac{c_{f,m}}{2} \tag{10.113}$$

Le coefficient moyen de frottement $c_{f,m}$ se calcule avec la relation empirique[1] :

$$c_{f,m} = 0,0592\,Re^{-0,2} \qquad (10.114)$$

Pour une distance x ($0 < x < l$; l - longueur de la plaque), l'équation (10.113) devient:

$$\frac{Nu_x}{Re_x} = \frac{c_{f,m}}{2} \qquad (10.115)$$

et compte tenu de l'équation (10.114), **la valeur locale Nu_x du nombre de Nusselt** (qui contient **la valeur locale α_x du coefficient de transfert**) a pour expression:

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0,0296\,Re^{0,8} \qquad (10.116)$$

Par conséquent, le coefficient de transfert correspondant à la distance x se calcule avec la relation:

$$\boxed{\alpha_x = 0,0296\frac{\lambda}{x}\left(\frac{wx}{\nu}\right)^{0,8}} \qquad (10.117)$$

b. *Ecoulement turbulent dans une conduite de section circulaire*

Soit une conduite horizontale de section S (D - diamètre intérieur). Désignons par Σ l'aire de la surface intérieure de la conduite correspondant à la longueur L sur laquelle se réalise le transfert de chaleur entre le paroi de la conduite (dont la température est t_p) et le fluide (dont la température sur l'axe de la conduite est t_f) - voir Fig. 10.12.

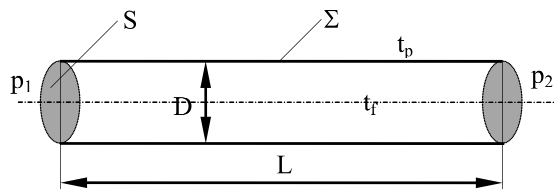


Fig. 10.12.

Dans ce cas, la valeur w_f désigne la vitesse moyenne par rapport à la section de la conduite.

Le frottement entre le fluide et la paroi de la conduite (dont la surface est Σ) produit une perte de pression $\Delta p = p_1 - p_2$. La force de pression $S\Delta p$ correspondant à cette perte égale la force de frottement $\tau_p \Sigma$ s'exerçant entre le fluide et la paroi:

$$\Delta p S = \tau_p \Sigma$$

$$\Rightarrow \Delta p = \tau_p \frac{\Sigma}{S} \qquad (10.118)$$

Compte tenu de *la loi de Darcy* (qui fournit l'expression des pertes linéaires de pression au cours d'un écoulement dans une conduite):

---

[1] Le terme "**empirique**" désigne les relations mathématiques obtenues par des expériences et non par une théorie.

$$\Delta p = \xi \frac{L}{D} \frac{\rho w_f^2}{2} \tag{10.119}$$

où ξ désigne **le coefficient des pertes linéaires**, et en écrivant $S = \frac{\pi D^2}{4} L$ et $\Sigma = \pi DL$, de l'équation (10.118) on tire:

$$\tau_p = \frac{\xi}{8} \rho w_f^2 \tag{10.120}$$

En tenant compte de l'équation (10.106), il résulte:

$$\alpha = \frac{\xi}{8} \rho w_f c_p \tag{10.121}$$

En prenant le diamètre *D* pour longueur standard, le nombre de Nusselt sera exprimé par:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} \tag{10.122}$$

On porte l'équation (10.121) dans l'équation (10.122) et on obtient:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = \frac{\xi}{8} \frac{\rho w_f D c_p}{\lambda} \tag{10.123}$$

Compte tenu que:

$$\frac{\rho w_f D}{\lambda} = Pe = RePr$$

et que Pr = 1 dans l'analogie de Reynolds, on trouve:

$$Nu = \frac{\xi}{8} Re \tag{10.124}$$

L'équation empirique utilisée pour l'évaluation du coefficient des pertes de pression linéaires est:

$$\xi = 0{,}184 Re^{-0{,}2} \tag{10.125}$$

et par conséquent, la corrélation correspondant au cas étudié est:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0{,}023 Re^{0{,}8}} \tag{10.126}$$

QUESTIONS

1. L'air chaud monte et pourtant il fait plus froid sur le sommet d'une montagne qu'au niveau de la mer. Expliquez.

2. Peut-on faire bouillir l'eau dans l'impondérabilité en l'échauffant par la partie inférieure du récipient?

3. Comment se transmet la chaleur entre l'air intérieur et la paroi d'une capsule spatiale? (voir aussi question numéro 8, Chapitre 9). En quelles conditions ce transfert est convectif?

4. Donnez des exemples de transferts convectifs causés par d'autres forces que celle de graviation.

5. Un ballon en caoutchouc contient de l'air chaud. Le ballon est élibéré et s'élève dans l'atmosphère. Décrivez et expliquez le comportement thermique et mécanique du ballon.

6. Expliquez le déplacement des plaques tectoniques terrestres et la formation des dorsales et des fosses océaniques.

7. En quelles conditions l'échauffement convectif de l'air par l'intermédiaire d'une paroi chaude devient impossible?

8. Le terme "radiateur" par lequel on désigne les corps utilisés dans l'échauffement central ou les échangeurs de chaleur dont le but est d'évacuer dans l'atmosphère la chaleur produite par un moteur à combustion interne est-il corect? Expliquez.

11. TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

11.1. Grandeurs fondamentales

Le rayonnement thermique est le processus de propagation de l'énergie thermique des corps par l'intermédiaire des ondes électromagnétiques.

Conformément à la théorie des quanta de Max Planck[1], les atomes peuvent passer de l'état fondamental en un état excité par suite des collisions ou de l'absorption des photons (quanta électromagnétiques). Puisque les états excités sont instables, l'atome reste un court intervalle de temps dans un tel état et revient dans l'état initial en émettant la différence d'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique.

L'énergie rayonnante a (comme la matière) une structure discontinue. Elle ne peut exister que sous forme de grains (ou *quanta*), appelés **photons**. Ceux-ci, selon la dualité onde-corpuscule postulée par Louis de Broglie[2], ont en même temps un caractère ondulatoire. Lorsque le rayonnement émis d'une telle façon rencontre un autre corps, une partie de l'énergie du rayonnement peut être absorbée par les atomes du celui-ci, en intensifiant l'agitation thermique; le résultat de cette intensification constitue l'augmentation de la température.

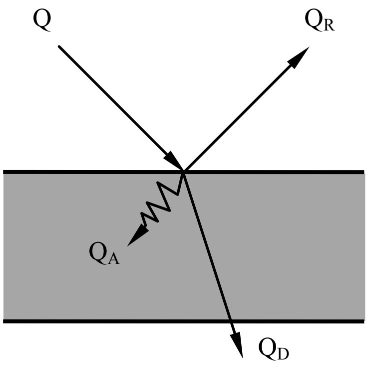


Fig. 11.1.

Fig. 11.1. schématise les interactions subies par un rayonnement rencontrant la surface d'un corps.

Le flux incident Q se divise en trois composantes:

- le flux **réfléchi** Q_R
- le flux **absorbé** Q_A
- le flux **traversant le corps (transmis)** Q_D

Par conséquent:

$$Q = Q_A + Q_R + Q_D \quad [W] \tag{11.1}$$

En divisant l'équation (11.1) par Q, on obtient:

[1] **Planck, M.** (1858 - 1947): physicien allemand (prix Nobel 1918) qui révolutionna la physique moderne en supposant que les échanges d'énergie s'effectuent de façon discontinue (sous forme de quanta).

[2] **de Broglie, L.** (1892 - 1987): physicien français (prix Nobel 1929), créateur de la mécanique ondulatoire (1923). Il donna aussi une nouvelle interprétation à la mécanique quantique.

$$1 = R + A + D \qquad (11.2)$$

Dans la relation précédente, les coefficients *A*, *R* et *D* représentent:

$R = \frac{Q_R}{Q}$ **- coefficient de réflexion**

$A = \frac{Q_A}{Q}$ **- coefficient d'absorption**

$D = \frac{Q_D}{Q}$ **- coefficient de transparence (pénétrabilité)**

Cas particuliers:

- **R = 1 (A = D = 0)**: le corps est dit **corps blanc** - c'est un corps qui renvoye tout le rayonnement
- **A = 1 (R = D = 0)**: le corps est dit **corps noir** - c'est le corps qui absorbe tout le rayonnement incident
- **D = 1 (A = R = 0)**: le corps est dit **corps diathermane** - c'est le corps intégralement transparent pour le rayonnement thermique

Les cas partriculiers énumérés représentent des corps fictifs puisque les corps réels (dits **corps gris**) réfléchissent, absorbent et laissent passer le rayonnement thermique ($A \neq 0, R \neq 0, D \neq 0$).

Cependant, on peut réaliser un corps quasi-noir, en perçant un orifice dans une sphère creuse (voir Fig. 11.2.) dont la surface intérieure est maintenue à une température constante. Tout rayonnement entrant par l'orifice est partiellement absorbé et partiellement réfléchi diffusément par la surface intérieure de la cavité. Le rayonnement ne quitte pas immédiatement la cavité; celui-ci subit des réflexions et absorptions répétées. Si, eventuellement, ce rayonnement réussit de sortir par l'orifice, il est tellement affaibli par les absorptions successives, que l'on peut négliger son énergie. Ce phénomène est indépendent de la surface de la cavité et du matériau de celle-ci.

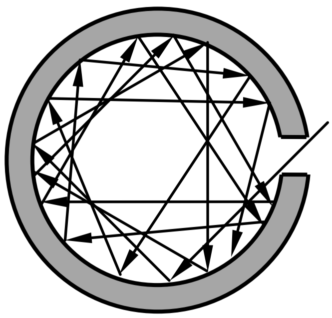


Fig. 11.2.

C'est ainsi qu'un orifice percé dans la paroi d'une vaste cavité agit comme un corps noir, parce-que pratiquement l'entier rayonnement qui entre par l'orifice est absorbé.

Les termes *blanc*, *noir* ou *gris* n'ont aucun correspondant colorimétrique; ils ont été introduits par similarité avec le comportement des corps sous la lumière visible (un corps blanc réfléchit entièrement la lumière incidente, un corps apparaît comme noir puisqu'il absorbe la lumière visible sous toutes les longueurs d'onde).

Les **corps opaques** sont les corps dont le coefficient de transparence est nul (D = 0) et donc A + R = 1.

Les grandeurs fondamentales du transfert de chaleur par rayonnement sont:

- **Le rayonnement monochromatique**: $\boldsymbol{Q_\lambda}$ [W / m]. C'est l'énergie rayonnée dans un intervalle étroit de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$, par une surface arbitraire, dans un intervalle de temps unitaire, dans toutes les directions d'une hémisphère.

- **Le rayonnement total**: $\boldsymbol{Q}$ [W]: C'est l'énergie rayonnée dans un intervalle de temps unitaire par une surface arbitraire dans toutes les directions d'une hémisphère pour toutes les longueurs d'onde.

- **L'émittance**: $\boldsymbol{E}$ [W / m^2]: C'est le rayonnement total correspondant à une surface unitaire dS:

$$E = \frac{dQ}{dS} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{11.3}$$

- **L'émittance spectrale (ou monochromatique)**: $\boldsymbol{I_\lambda}$ [W / m^3]: C'est l'émittance correspondant à un intervalle étroit de longueurs d'onde, comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$:

$$I_\lambda = \frac{dE}{d\lambda} \quad \left[\frac{W}{m^3}\right] \tag{11.4}$$

11.2. Lois du rayonnement thermique

Les lois du rayonnement sont énoncées dans le cas du corps noir en conditions d'équilibre thermodynamique. Du point de vue du rayonnement thermique, *l'équilibre thermodynamique d'un système de corps rayonnants est atteint lorsque chaque corps du système émet et absorbe de l'énergie rayonnante en quantités égales.*

En conséquence:

Les corps d'un système rayonnant en équilibre thermodynamique ont la même température.

Le rayonnement émis par la surface intérieure d'une cavité close est absorbé et réfléchi plusieurs fois et finalement remplit uniformément la cavité. Lorsqu'on place dans la cavité un corps noir dont la température égale la température de celle-ci, le corps reçoit du rayonnement d'une façon uniforme, c'est à dire qu'il est rayonné isotropiquement. Le corps absorbe tout le rayonnement incident et lorsque le système constitué par la cavité et le corps est à la même température, l'énergie rayonnée par celui-ci doit égaler l'énergie qu'il reçoit. Autrement, le second principe de la thermodynamique serait violé parce-qu'il existerait un transfert de chaleur entre deux corps ayant la même température.

Le rayonnement en la présence duquel un système rayonnant est en équilibre thermodynamique, est dit **rayonnement d'équilibre du corps noir**.

11.2.1. Loi de Planck

Cette loi décrit la dépendence (en fonction de la longueur d'onde λ) de l'émittance spectrale $I_{0\lambda}$ du corps noir, en prennant la température T pour paramètre.

L'expression de la loi de Planck est:

$$\boxed{I_{0\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}} \quad \left[\frac{W}{m^3}\right] \tag{11.5}$$

où:

- $I_{0\lambda}$ - émittance monochromatique du corps noir
- λ - longueur d'onde du rayonnement monochromatique, en mètres
- T - température absolue du corps noir, en Kelvins
- C_1 - constante égale à $0{,}374 \cdot 10^{-15}$ Wm^2
- C_2 - constante égale à $1{,}4388 \cdot 10^{-2}$ mK

Sur la Fig. 11.3. on a représenté la variation de $I_{0\lambda}$ pour quelques valeurs de la température ($T_1 < T_2 < T_3 < T_4$). On observe que chaque courbe présente un maximum d'autant plus évident que la température est plus élevée. La relation entre λ_{max} où l'émittance atteint son maximum et la température est donnée par **la loi du déplacement de Wien**:

$$\lambda_{max} T = 0{,}2896 \text{ cm} \cdot \text{K} \tag{11.6}$$

Sur la Fig. 11.3. on a tracé en pointillés la courbe représentant le lieu géométrique des maxima des courbes de variation de $I_{0\lambda}$ en mettant en évidence que le maximum de l'émittance se déplace vers les petites longueurs d'onde lorsque la température du corps noir augmente.

Dans le domaine d'intérêt technique, l'émittance devient importante pour des valeurs de λ comprises entre 0,3 et 50 μm (1μm = 10^{-6} m). Le domaine visible étant compris entre 0,4 et 0,7 μm, il résulte qu'à des températures inférieures à 650 ^{o}C, seulement une faible quantité de l'énergie rayonnante correspond à cet intervalle. A des températures supérieures à 650 ^{o}C, l'énergie rayonnante dans le domaine visible

augmente et par conséquent, l'oeil humain commence à la détecter. A environ 700 °C, l'énergie correspondant à des longueurs d'onde de 0,6 - 0,7 μm est suffisante pour impressioner la rétine, la sensation subjective perçue par le cerveau étant celle du rouge foncé. Avec la croissance de la température, la couleur vire vers le rouge vif et puis vers le jaune, en devenant blanche à environ 1300 °C[1]. En même temps, la brillance augmente puisqu'une quantité du rayonnement total de plus en plus grande tombe dans le domaine visible.

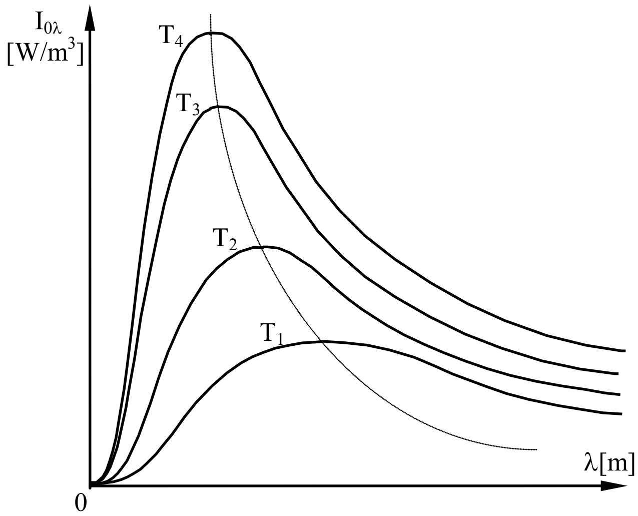


Fig. 11.3.

La loi de Planck comporte deux cas extrêmes auxquels correspondent deux autres lois[2]:

a. *Loi de Rayleigh-Jeans*

Cette loi correspond au cas où $\lambda T >> C_2$. En développant en série la fonction exponentielle:

$$exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) = 1 + \frac{C_2}{\lambda T} + \frac{1}{2!}\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)^2 + \ldots$$

et en retenant seulement les premiers deux termes, on obtient l'expression de la loi de Rayleigh-Jeans:

$$I_{0\lambda} = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4} \qquad (11.7)$$

---

[1] La sensation produite sur la rétine en fonction de la température du corps rayonnant sert à apprecier la température des pièces durant le traitement thermique.

[2] On traite les deux cas particuliers comme des lois séparées, pour des raisons d'ordre historique. Ces deux lois ont été énoncées avant que Planck ne reussisse à intégrer tous les cas possibles dans une loi unique.

b. *Loi de Wien*

Cette loi (différente de la loi du déplacement) s'obtient en cas où $\lambda T << C_2$. En ce cas on peut négliger l'unité par rapport à l'exponentielle et on trouve:

$$I_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \tag{11.8}$$

11.2.2. Loi de Stefan-Boltzmann

Cette loi représente la relation quantitative entre la température et l'émittance totale E_0 du corps noir et a été déduite par suite des expériences par Stefan[1] en 1879. Ludwig Boltzmann[2] a obtenu le même résultat par des considérations thermodynamiques.

Puisque, compte tenu de la relation (11.4), l'émittance élémentaire $dE = I_\lambda d\lambda$, on peut obtenir l'expression de cette loi, en intégrant de 0 à +T l'émittance spectrale $I_{0\lambda}$. Par conséquent:

$$\boxed{E_0 = \int_0^\infty I_{0\lambda} d\lambda = \sigma_0 T^4} \tag{11.9}$$

où $\sigma_0 = 5{,}6687 \cdot 10^{-8}$ W / m^{2}K^4 représente **la constante de Stefan-Boltzmann**. Pour des raisons de simplicité, on écrit (11.9) dans la forme équivalente:

$$E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 \tag{11.10}$$

où C_0 désigne **le coefficient de rayonnement du corps noir** (C_0 = 5,6687 W / m^{2}K^4).

La loi est aussi valable dans le cas des corps réels (corps gris):

$$E = C \left(\frac{T}{100} \right)^4 \tag{11.11}$$

où C représente **le coefficient de rayonnement du corps gris**. En divisant E par E_0 (à la même température), on obtient:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon \tag{11.12}$$

Le quotient ε désigne **le dégré de noir**, ou **facteur d'émission**. La valeur du dégré de noir est comprise entre 0 (corps blanc) et 1 (corps noir). Le facteur d'émission dépend de la longueur d'onde du rayonnement, de l'état de la surface du corps et de la température de celui-ci. Compte tenu de (11.12), on écrit la loi de Stefan-Boltzmann

---

[1] **Stephan J.** (1835 - 1893): physicien autrichien, connu pour ses travaux sur le rayonnement thermique.

[2] **Boltzmann L.** (1844 - 1906): physicien autrichien, pionnier de la thermodynamique statistique.

pour le corps gris comme suit:

$$\boxed{E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 = 5{,}6687\varepsilon\left(\frac{T}{100}\right)^4} \qquad (11.13)$$

11.2.3. Loi de Kirchhoff[1]

Cette loi lie l'énergie rayonnée par un corps et l'énergie qu'il absorbe, en conditions d'équilibre thermodynamique.

Soit un système rayonnant composé de deux corps fermés dans une cavité isolée du point de vue thermique, représentant un corps noir. A l'équilibre thermodynamique, l'énergie rayonnée par l'un des deux corps égale l'énergie qu'il absorbe. Par conséquent, on écrit pour le premier corps:

$$E_1 = E_{absorbé,\,1} = A_1\, E_{incident} = A_1\, E_0 \qquad (11.14)$$

Pour le second corps:

$$E_2 = E_{absorbé,\,2} = A_2\, E_{incident} = A_2\, E_0 \qquad (11.15)$$

Dans les relations ci-dessus, A_1 et A_2 représentent les coefficients d'absorption des deux corps et E_0 désigne le rayonnement du corps noir à la température d'équilibre thermodynamique du système.

Par conséquent:

$$\boxed{\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = E_0 = f(T)} \qquad (11.16)$$

La loi de Kirchhoff, décrite par la relation (11.16), s'énonce comme il suit:

La nature du corps n'influence pas le quotient de l'énergie rayonnée par le coefficient d'absorption. Ce rapport est toujours égal à l'émittance du corps noir à la même température.

Cette loi a une conséquence très importante:

En écrivant en général $E = AE_0$ et compte tenu de la loi de Stefan-Boltzmann $E = \varepsilon E_0$, il résulte que **le dégré de noir ε égale le coefficient d'absorption A**:

$$\boxed{\varepsilon = A} \qquad (11.17)$$

---

[1] **Kirchhoff G.R.** (1824 - 1887): physicien allemand qui, inventant le spectroscope, fonda l'analyse spectrale. Contributions dans le calcul des réseaux électriques maillés.

11.2.4. Loi de Lambert[1]

Jusqu'à présent, nous avons considéré seulement le rayonnement total émis par un corps noir dans toutes les directions. On peut matérialiser ceci en plaçant une hémisphère sur la surface élémentaire dS_1 (voir Fig. 11.4.). Le rayonnement émis par dS_1 sera entièrement intercepté par l'hémisphère, mais il existe un seul point sur celle-ci d'où la surface dS_1 est vue sans distorsion: c'est le point situé exactement au-dessus de la surface élémentaire. De tout autre point dont la position par rapport à la verticale est exprimée par l'angle φ, **la surface dS_1 sera vue comme la projection dS_1 cos φ**:

$$dS_{\varphi} = dS_1 \cos\varphi \tag{11.18}$$

La relation précédente représente **la loi de Lambert** (dite aussi **loi de cosinus de Lambert**).

Pour déterminer le flux thermique (émis par dS_1) arrivant sur la surface dS_2 située sur l'hémisphère, on introduit l'intensité I, définie comme *l'énergie rayonnée dans une direction par unité d'angle solide dω et par unité de surface dS₁ projetée sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation*. Dans le cas de la surface dS_1, l'intensité I_φ du rayonnement reçu par dS_2 dans la direction déterminée par l'angle φ est:

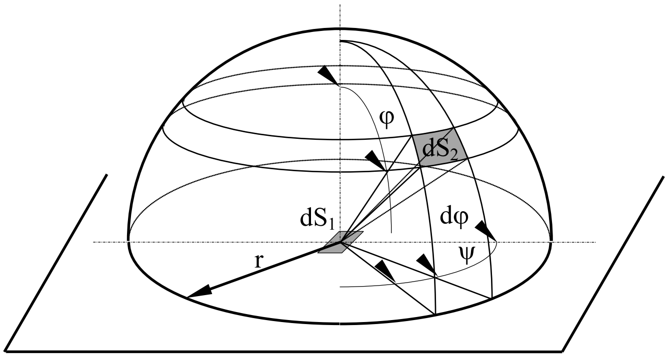


Fig. 11.4.

$$I_{\varphi} = \frac{dQ_{12}}{dS_1 \cos\varphi \, d\omega_1} \quad \left[\frac{W}{m^2 \text{steradian}}\right] \tag{11.19}$$

où:
- dQ_{12} - le flux thermique échangé entre les surfaces dS_1 et dS_2.
- dS_1 cos φ - la projection de la surface dS_1
- dω_1 - l'angle solide (évalué en stéradians) correspondant à la surface dS_2 vue depuis la surface dS_1:

$$d\omega_1 = \frac{dS_2}{r^2} \tag{11.20}$$

Par conséquent:

[1] **Lambert J.H.** (1728 - 1777): mathématicien et physicien français, connu pour avoir démontré l'incommensurabilité du nombre π. Etudes sur la trigonométrie sphérique et l'optique.

$$dQ_{12} = I_{\varphi}\, cos\,\varphi dS_1 \frac{dS_2}{r^2} \tag{11.21}$$

Dans le cas du rayonnement diffus, I_{φ} = cte = I (le rayonnement est uniforme dans toutes les directions).

$$\Rightarrow dQ_{12} = I\, cos\,\varphi dS_1 \frac{dS_2}{r^2} \tag{11.22}$$

En conséquence:

$$E = \int_{S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I\, cos\,\varphi \frac{dS_2}{r^2} \tag{11.23}$$

Compte tenu que l'angle solide $d\omega_1$ peut être écrit (voir Fig. 11.4.):

$$d\omega_1 = \frac{dS_2}{r^2} = \frac{(r\, sin\,\varphi) d\psi (r d\varphi)}{r^2} = sin\,\varphi\, d\varphi\, d\psi \tag{11.24}$$

et en portant (11.24) dans (11.23), on obtient:

$$E = I \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi\, cos\,\varphi\, d\varphi = \pi I \tag{11.25}$$

Par conséquent, l'émittance totale est π fois l'intensité du rayonnement.

Dans le paragraphe suivant, nous allos analyser seulement les cas les plus simples d'échange de chaleur par rayonnement, c'est à dire les échanges entre surfaces parallèles.

11.4. Echange de chaleur par rayonnement entre deux surfaces parallèles

Considérons deux surfaces planes (parois) séparées par un milieu transparent par rapport au rayonnement thermique. On suppose que la distance entre les parois est très inférieure aux dimensions des celles-ci. Le but de notre analyse est de calculer la densité de flux q_s échangée entre les parois dont les températures $T_1 > T_2$ sont connues.

On impose les conditions suivantes:

- les coefficients d'absorption A_1 et A_2 sont constants et indépendants de la température des surfaces
- les températures T_1 et T_2 et les émittances E_1 et E_2 sont uniformes sur les surfaces
- le processus est stationnaire
- l'échange de chaleur se fait exclusivement par rayonnement

Pour déterminer l'énergie échangée, on utilise **la méthode du rayonnement effectif** (voir Fig. 11.5.). Soit un corps recevant le rayonnement incident $E_{incident}$ provenant de l'extérieur et en même temps, émettant son propre rayonnement E.

Puisqu'une partie du rayonnement incident est absorbée par le corps (supposé opaque, c'est à dire $D = 0$ L $A + R = 1$), **le rayonnement effectif E_{ef} quittant le corps est composé de la fraction réfléchie $E_{réfl}$ du rayonnement incident et du rayonnement E émis par le corps**:

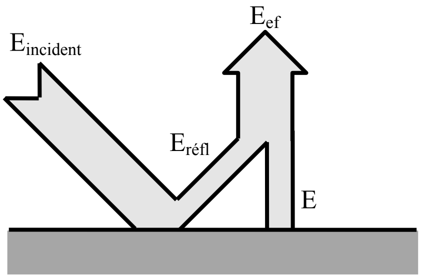


Fig. 11.5.

$$E_{ef} = E_{réfl} + E \qquad (11.26)$$

Mais $E_{réfl} = E_{incident}$ et puisque $A + R = 1$, on peut écrire:

$$E_{ef} = (1 - A)E_{incident} + E \qquad (11.27)$$

La relation précédente constitue l'essence de la méthode du rayonnement effectif.

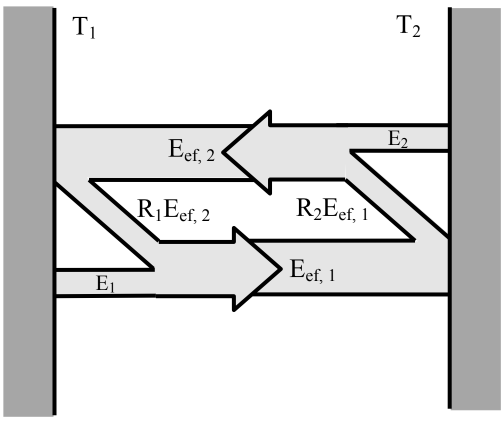


Fig. 11.6.

Sur la Fig. 11.6. on a schématisé les deux parois et les flux échangés par rayonnement.

Puisque $T_1 > T_2$, la densité de flux q_s échangée représente la différence des rayonnements effectifs correspondant aux parois:

$$q_s = E_{ef,1} - E_{ef,2} \qquad (11.28)$$

Compte tenu que le rayonnement incident à une paroi représente en même temps le rayonnement effectif provenant de l'autre paroi, on applique la méthode du rayonnement effectif, en écrivant:

$$E_{ef,1} = E_1 - (1 - A_1)E_{ef,2} \qquad (11.29)$$

$$E_{ef,2} = E_2 - (1 - A_2)E_{ef,1} \qquad (11.30)$$

Il résulte un système de deux équations dont les inconnues sont les deux émittances effectives $E_{ef,1}$ et $E_{ef,2}$. La solution du système est:

$$E_{ef,1} = \frac{E_1 + E_2 - A_2E_1}{A_1 + A_2 - A_1A_2} \qquad (11.31)$$

$$E_{ef,2} = \frac{E_1 + E_2 - A_1E_2}{A_1 + A_2 - A_1A_2} \qquad (11.32)$$

En portant les relations (11.31) et (11.32) dans (11.28), il ressort que:

$$q_s = \frac{A_2E_1 - A_1E_2}{A_1 + A_2 - A_1A_2} \tag{11.33}$$

Compte tenu de la loi de Stefan-Boltzmann:

$$E_1 = \varepsilon_1 C_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \quad \text{et} \quad E_2 = \varepsilon_2 C_0 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4$$

et de la loi de Kirchhoff:

$$A_1 = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad A_2 = \varepsilon_2$$

on obtient:

$$q_s = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 C_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 C_0 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} \tag{11.34}$$

En divisant (11.34) par $\varepsilon_1\varepsilon_2$, on trouve:

$$\boxed{q_s = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] = \varepsilon_r C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]} \tag{11.35}$$

où ε_r désigne **le facteur d'émission réduit du système rayonnant**:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}} \tag{11.36}$$

Remarque

Une surface fermée S_1 de température T_1 entourée d'une autre surface fermée S_2 de température T_2 ($T_1 > T_2$) échange le flux rayonnant:

$$q_s = \varepsilon_r C_0 S_1 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \tag{11.37}$$

où:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{11.38}$$

11.4. Echange de chaleur par rayonnement dans la présence des écrans

Le rôle des écrans est de réduire le flux thermique échangé par rayonnement entre les corps.

Considérons les deux parois du paragraphe précédent, dans les mêmes conditions, mais séparées par un écran. Il existe deux cas:

a. *Facteurs d'émission réduits égaux*

On suppose que les facteurs d'émission réduits ε_{1-e} (paroi *1* - écran) et ε_{e-2} (écran - paroi *2*) sont égaux:

$$\varepsilon_{1-e} = \varepsilon_{2-e} = \varepsilon_r$$

Le système est schématisé sur la Fig. 11.7.

Pour déterminer la température T_e de l'écran, compte tenu que le régime thermique est stationnaire, on égale les densités de flux échangées entre la paroi *1* et l'écran $q_{s1-e} = \varepsilon_r C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_e}{100} \right)^4 \right]$, respectivement entre la paroi *2* et l'écran $q_{se-2} = \varepsilon_r C_0 \left[\left(\frac{T_e}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$:

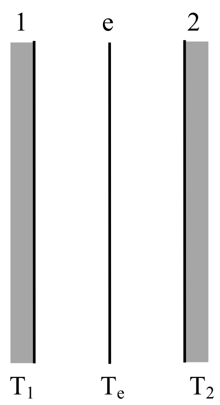


Fig. 11.7.

$$q_{s1-e} = q_{se-2} = q_{se} \tag{11.39}$$

Il ressort que la température de l'écran est:

$$T_e = \left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{11.40}$$

En remplaçant T_e donnée par (11.40) dans l'expression de $q_{s\,1-e}$, on trouve:

$$q_{s,e} = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \tag{11.41}$$

En comparant cette relation à l'expression de la densité de flux q_s échangé en l'absence de l'écran, on constate que $q_{s,e} = \frac{1}{2} q_s$.

Par conséquent, lorsqu'il y a *n* écrans, l'énergie échangée diminue *n* + 1 fois:

$$q_{s,e} = \frac{1}{n+1} q_s \qquad (11.42)$$

b. *Facteurs d'émission réduits différents*

C'est le cas général. Supposons que les parois sont séparées par *n* écrans dont les facteurs d'émission réduits sont différents. Les flux échangés sont:

$$q_{s,1-e_1} = \varepsilon_{r,1-e_1} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{e_1}}{100}\right)^4\right]$$

$$q_{s,e_1-e_2} = \varepsilon_{r,e_1-e_2} C_0 \left[\left(\frac{T_{e_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{e_2}}{100}\right)^4\right]$$

....

$$q_{s,e_n-2} = \varepsilon_{r,e_n-2} C_0 \left[\left(\frac{T_{e_n}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]$$

En écrivant les "différences" de température, compte tenu que le régime thermique est stationnaire ($q_{s,1-e_1} = q_{s,e_1-e_2} = q_{s,e_n-2} = q_{s,e}$), on obtient:

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{e_1}}{100}\right)^4 = \frac{q_{s,e}}{C_0} \frac{1}{\varepsilon_{r,1-e_1}}$$

$$\left(\frac{T_{e_1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{e_2}}{100}\right)^4 = \frac{q_{s,e}}{C_0} \frac{1}{\varepsilon_{r,e_1-e_2}}$$

....

$$\left(\frac{T_{e_n}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = \frac{q_{s,e}}{C_0} \frac{1}{\varepsilon_{r,e_n-2}}$$

On trouve:

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = \frac{q_{s,e}}{C_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r,1-e_1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r,e_1-e_2}} + \ \dots \ + \frac{1}{\varepsilon_{r,e_n-2}}\right) \qquad (11.43)$$

d'où:

$$q_{s,e} = \varepsilon_{r,e} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \qquad (11.44)$$

Le facteur réduit du système est:

$$\varepsilon_{r,e} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_{r,1-e_1}} + \dfrac{1}{\varepsilon_{r,e_1-e_2}} + \ldots + \dfrac{1}{\varepsilon_{r,e_n-2}}} \tag{11.45}$$

Compte tenu de l'expression (11.36) pour le facteur réduit d'un système de deux corps, on écrit:

$$\varepsilon_{r,e} = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{e_1}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{e_1}} + \frac{1}{\varepsilon_{e_2}} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\varepsilon_{e_n}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \left(\frac{2}{\varepsilon_{e_1}} - 1\right) + \left(\frac{2}{\varepsilon_{e_2}} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{2}{\varepsilon_{e_n}} - 1\right)$$

$$\varepsilon_{r,e} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_{1-2}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{\varepsilon_i} - 1\right)} \tag{11.46}$$

Par conséquent, en utilisant des écrans dont les facteurs d'émission sont faibles, on obtient une réduction significative du flux thermique échangé par rayonnement entre les deux parois.

QUESTIONS

1. Comment définit-on l'équilibre thermique du point de vue du transfert de chaleur par rayonnement?

2. Le méthane produit une flamme bleue. Pourriez-vous expliquer pourquoi on intervient dans le but de modifier cette couleur en rouge? (l'une des méthodes, utilisée dans le cas des chaudières, est de réaliser une combustion locale incomplète dont le résultat est l'apparition des particules très fines de carbone, qui produit par combustion une flamme rouge - ce procédé est appelé “auto-carburation de la flamme”).

3. La vitre est transparente pour le rayonnement solaire, mais elle est opaque pour le rayonnement infrarouge. En partant de ce phénomène, expliquez le mécanisme de l'effet de serre. Le dioxyde de carbone a la même propriété que la vitre et ceci explique l'effet de serre dont le résultat est l'échauffement global.

4. Certains serpents (le crotale par exemple) peuvent localiser leur proie (des petits mamifères) dans l'obscurité la plus totale, sans être munis d'un sonar (radar ultrasonique) comme les chauve-souris. Expliquez.

5. Pour se frayer un chemin dans la banquise qui a coincé leur bateau, les marins ont “matérialisé” le canal d’échappe en saupoudrant de la poudre de charbon sur la glace jusqu’à la mer libre. Pourquoi?

6. Les satellites sont enveloppés en feuille d’or ou d’argent. Pourquoi?

7. Les fondeurs avec expérience peuvent préciser la température de l’acier fondu par l’intermédiaire de la couleur de celui-ci. Expliquez.

8. Pourquoi les vêtements d’hiver sont de couleurs foncées et les vêtements d’été sont de couleurs claires?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Baehr, D.H. - *Technische Thermodynamik*, Springer Verlag, Berlin, 1966.

2. Bejan, A. - *Convection Heat Transfer*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

3. Bejan, A. - *Advanced Engineering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1988.

4. Bejan, A. - *Entropy Generation Through Heat And Fluid Flow*, John Wiley and Sons, New York, 1994.

5. Besson, J. - *Précis de thermoynamique et cinétique électrochimiques*, Ellipses, Paris, 1994.

6. Carabogdan, G.R. (coordonator) - *Manualul inginerului termotehnician*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

7. Carslaw, H.S., Jaeger, J.C. - *Conduction Of Heat In Solids*, Oxford at Clarendon Press, 1959.

8. Chiriac, F., Leca, A., Pop, M., Badea, A., Luca, L., Antonescu, N., Peretz, D. - *Procese de transfer de caldură şi masă în instalaţiile industriale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.

9. D'Albon, G., Şchiopu, M., Peretz, D. - *Termodinamica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

10. Dănescu, Al., Popa, B., Radcenco, V., Cărbunaru, A., Iosifescu, C., Marinescu, M., Petrescu, St., Silaşi, C., Ştefănescu, D., Arădău, D., Dinache, P., Mădărăşan, T. - *Termotehnică şi maşini termice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

11. Eckert, E.R.G., Drake, R.M. - *Analysis Of Heat And Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1972.

12. Faye, S. - *Thermodynamique*, Magnard, Paris, 1981.

13. Halliday, D., Resnick, R. - *Fizică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

14. Incropera, F., De Witt, D. - *Fundamentals Of Heat And Mass Transfer*, John Wiley and Sons, New York, 1990.

15. Isachenko, V.P., Ossipova V.A., Sukomel, A.S. - *Heat Transfer*, Moscow, 1977.

16. Isnard, P., Montias, H. - *Thermodynamique. Cours, exercices et problèmes résolus*, Pierre Bordas et Fils Editeurs, Paris, 1981.

17. Kirillin, V.A., Sychev, V.V., Sheindlin, A.E. - *Engineering Thermodynamics*, Moscow, 1981.

18. Kreith, F. - *Principles Of Heat Transfer*, International Textbook Company, Scranton (Pennsylvania), 1958.

19. Leonăchescu, N. - *Termotehnica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

20. Petrescu, St., Petrescu, V. - *Principiile termodinamicii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

21. Popa, B., Vintilă, C. - *Transfer de căldură în procesele industriale*, Editura Dacia, Cluj, 1975.

22. Popa, B., Vintilă, C. - *Termotehnică şi maşini termice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.

23. Stephan, K., Mayinger, F. - *Thermodynamik-Grundlagen und technische Anwendungen (Band 1 Einstoffsysteme)*, Springer Verlag, Berlin, 1990.

24. Şandru, E., Mihăilă, O., Caluianu, V., Bianchi, A.M., Antonescu, N. - *Termotehnică şi aparate termice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

25. Ştefănescu, D., Marinescu, M. - *Termotehnică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.Ştefănescu, D., Leca, A., Luca, L., Badea, A., Marinescu, M. - *Transfer de căldură şi masă - teorie şi aplicaţii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.